



2. מרחק נקודה אל ישר מדריך למורה

מבוא

מטרתה של יחידה זו היא העמקת ההבנה בנושא הקו הישר. משוואת הישר מוגדרת כאן כמקום הגיאומטרי של כל הנקודות ששיפוע הקטע המחבר אותן עם אחת משתי נקודות נתונות, שווה לשיפוע הקטע המחבר את שתי הנקודות הנתונות.

במסגרת היחידה יתכננו התלמידים את הפונקציות הבאות: פונקציה לחישוב שיפוע של ישר לפי שתי נקודות, פונקציה למציאת משוואת ישר לפי שתי נקודות, ופונקציה לחישוב מרחק נקודה מישר. בעזרת התכנות נשיג שתי מטרות: הבנת המתמטיקה המייצרת את הנוסחות המקובלות ועקיפת חישובים סבוכים – בעזרת התוכנה – ועל ידי כך מיקוד תשומת הלב בהבנה ובהעמקה.

עוד ביחידה זו: נבחן את המצב ההדדי בין שני ישרים, והקשר בין שיפועי הישרים לייצוגם הגרפי; נבצע הזזות של ישרים על ידי הצבת ביטויים מתאימים במקום המשתנים, ונבחין בין מרחק נקודה מישר לבין 'מרחק מכוון' של נקודה אל ישר. השימוש במרחק מכוון דורש קביעה מוקדמת של סימנו של הביטוי בתוך הערך המוחלט בנוסחת המרחק. לנוחות החישוב, ננקטה ביחידה זו הסכמה כי הסימן של מרחקה המכוון של ראשית הצירים אל ישר נתון יהיה חיובי. משוואות הישרים תוצגנה בהתאם, והייצוג האלגברי יתמוך בניתוח הנתונים ובחישובים האלגבריים. הסכמה זו נוחה ומקובלת בחלק מספרי הלימוד, והיא אנלוגית להסכמות מוכרות אחרות בתחום זה.

רשימת הפעילויות:

פעילות 2.1 – משוואת ישר לפי שתי נקודות

פעילות 2.2 – מצב הדדי בין שני ישרים

פעילות 2.3 – מרחק מנקודה לישר

פעילות 2.4 – שאלות

פעילות 2.1 – משוואת ישר שתי נקודות

א. קצות הקטע AB הם: $A=[4, 5]$, $B=[8, 6]$.

מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות $P=[x, y]$ שעבורן שיפוע הקטע AB שווה לשיפוע הקטע

$$AP? \text{ היעזרו בפונקציה לחישוב שיפוע: } \text{SLOPE}(P, Q) := \frac{P \downarrow 2 - Q \downarrow 2}{P \downarrow 1 - Q \downarrow 1}$$

תזכורת: $P \downarrow 1$ נותן את שיעור ה- x של נקודה P ; $P \downarrow 2$ נותן את שיעור ה- y של נקודה P .

כתבו את השוויון המייצג את התנאי, ושרטטו אותו.

התאימו את מערכת הצירים בעזרת מקשי החיצים בסרגל הכלים של החלון הגרפי הסבירו מה קיבלתם.

ב. בחרו שתי נקודות A , B כרצונכם ומצאו את משוואת הישר העובר דרכן.

רשמו את המשוואה ובדקו את תשובתכם בעזרת שרטוט במערכת צירים.

משוואת ישר לפי שתי נקודות

למציאת משוואת ישר (שאינו מקביל לציר y) לפי שתי נקודות A ו- B שעליו, נגדיר לתוכנה את הפונקציה: $\text{LINE}(A, B)$ על-ידי שוויון בין שיפוע הקטע AB לשיפוע הקטע שבין הנקודה A לנקודה כללית כלשהי $P=[x, y]$ שעליו.

$$\text{LINE}(A, B) := \text{SLOPE}(A, B) = \text{SLOPE}(A, P) \quad \text{הקלידו:}$$

 התאימו את מערכת הצירים על-ידי מרכז החלון לפי הסמן

ג. נתונות שתי נקודות כלליות A ו- B .

כדי להשתמש בנקודות כלליות, הגדירו אותן באופן הבא. הקלידו: $A:=$, $B:=$

מצאו בעזרת הפונקציה $\text{LINE}(A, B)$ את משוואת הישר העובר דרכן.

עתה מצאו הצגה של ישר זה בצורה $y = mx + n$.

הדרכה: כדי להביע את הפרמטר n בעזרת שיעורי הנקודות A ו- B , הציבו 0 במקום x במשוואה

שמצאתם.

תזכורת: להצבה בחרו SUB בסרגל הכלים של החלון האלגברי.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name2.1.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 2.1

ראו גם קובץ: [solution2.1.dfw](#)

א. נגדיר את הנקודות הנתונות, ונתכנת את פונקציית השיפוע כפי שעשינו ביחידה הקודמת.

$[A := [4, 5], B := [8, 6]]$

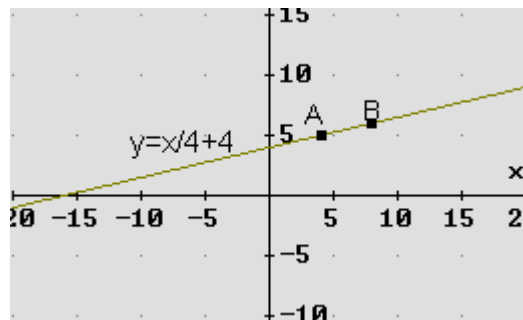
$$\text{SLOPE}(P, Q) := \frac{P_2 - Q_2}{P_1 - Q_1}$$

נתייחס לישר כאל המקום הגיאומטרי של כל הנקודות ששיפוע הישר שעליו הקטע המחבר אותן עם נקודה מסוימת, שווה לשיפוע הקטע המחבר נקודה זו עם נקודה נתונה אחרת. הגדרה זו של

$$\text{SLOPE}(A, B) = \text{SLOPE}(A, [x, y])$$

הישר תורמת להבנת הנוסחה המקובלת למציאת משוואת ישר $(y - y_1 = m(x - x_1))$

נפשט את המשוואה שכתבנו, נסמן על הצג את שתי הנקודות הנתונות, ונשרטט בעזרת התוכנה את הישר העובר דרכן, שאת משוואתו מצאנו:



ב. נגדיר לתוכנה פונקציית המתאימה לשתי נקודות A ו B את משוואת הישר העובר דרכן, בעזרת תיאור הישר כמקום גיאומטרי, כפי שהצענו קודם.

שימו לב לכתיב של התוכנה. להגדרה סמנו $=$:

$$\text{LINE}(A, B) := \text{SLOPE}(A, B) = \text{SLOPE}(A, [x, y])$$

עתה אפשר לבחור זוג נקודות כרצוננו, למצוא את משוואת הישר העובר דרכן בעזרת הפונקציית האחרונה, ולבדוק את התשובה בעזרת שרטוט. כאן המקום לדון במקרה של ישר המקביל לציר ה- y, ובקשר שבין הייצוג האלגברי לייצוג הגרפי של ישר זה.

ג. בסעיף הקודם הבענו אמנם משוואת ישר כללי (העובר דרך שתי נקודות A ו B), אך לא בצורה: $y = mx + n$. כדי להביא את המשוואה לצורה זו, עלינו לבטא את הפרמטרים m ו n. את m נוכל

להציג כשיפוע הישר, אותו כבר ביטאנו היטב כשתכנתנו את פונקציית השיפוע (Slope). על מנת לבדוד את הפרמטר n , נפשט את המשוואה שבידינו ונציב בה $x = 0$.

$$\text{LINE}(A, B) = \left(\frac{A_2 - B_2}{A_1 - B_1} = \frac{A_2 - y}{A_1 - x} \right)$$

$$\frac{A_2 - B_2}{A_1 - B_1} = \frac{A_2 - y}{A_1}$$

התקבלה משוואת הישר AB:

$$y = \text{SLOPE}(A, B) \cdot x + \frac{A_2 \cdot B_1 - A_1 \cdot B_2}{B_1 - A_1}$$

פעילות 2.2 – מצב הדדי בין ישרים

א. נתון הישר שמשוואתו: $y = 2x + 8$. הישר שמשוואתו $y = 0.5x + 13$ מאונך ישר הנתון.

מהם שיעורי נקודת החיתוך של שני הישרים? שרטטו את שני הישרים וסמנו את נקודת החיתוך.

תזכורת: הקליקו  להתאמת מערכת הצירים בחלון הגרפי.

ב. הזיזו את הישר הנתון ($y = 2x + 8$) שש יחידות ימינה ושלוש יחידות כלפי מטה

האירו את משוואת הישר, והציבו בה בעזרת הפקודה **SUB**: $x = x - 2$, $y = y + 9$.

שרטטו את הישר המוזז.

מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של הישר המוזז עם הישר שבניתם בסעיף א וסמנו אותה בשרטוט. מה הקשר בין שיעורי שתי נקודות החיתוך?

פתרון מערכת משוואות בשני נעלמים

לפתרון מערכת משוואות רשמו בשורת העריכה את שתי המשוואות וביניהן את הסימן "וגם" $\wedge$. תמצאו

את הסימן בסרגל הסימנים בתחתית המסך. הקישו  (**SOLVE**) והאירו את x ו y בחלון שנפתח.

הציעו הזזות נוספות שיזיזו את הישר הנתון לישר המוזז שקיבלתם.

ג. צבעו את השטח הכלוא בין הישר הנתון והישר המוזז.

כתבו מערכת אי שוויונים המייצגת את השטח הכלוא בין הישרים: $[y < 2x + 8 \wedge y > \underline{\hspace{2cm}}]$

והקישו  לצביעת השטח.

ד. כתבו משוואות ארבעה ישרים היוצרים טרפז כזה:

רשמו מערכת אי-שוויונים מתאימה

וצבעו את הטרפז.

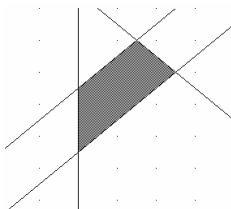
ה. הזיזו את הטרפז שש יחידות ימינה.

הקלידו את כל ארבעה האי-שוויונים בתוך סוגריים מרובעים, עם הסימן $\wedge$ ("וגם") בין אחד לשני.

האירו את מערכת האי-שוויונים, והציבו בה בעזרת הפקודה **SUB**: $x = x - 6$.

שרטטו  את הטרפז המוזז בבת אחת.

עתה הזיזו את הטרפז חמש יחידות כלפי מטה. בצעו הזזות נוספות.



שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name2.2.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 2.2

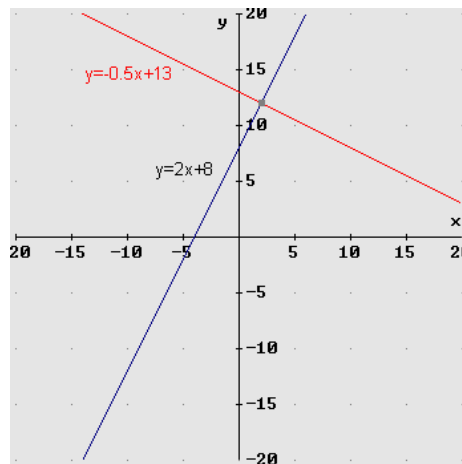
ראו גם קובץ: [solution2.2.dfw](#)

בפעילות זו נגבש את הידע הנצבר בפעילויות הקודמות ונכין כלים שונים להמשך העבודה בסביבה הטכנולוגית.

א. ידוע (מיחידה 1) כי מכפלת השיפועים של ישרים ניצבים היא -1. לפיכך, אם שיפועו של הישר

הנתון הוא 2, אז שיפוע הישר המאונך לו הוא $-1/2$. ומשוואת האנך המבוקש: $y = -\frac{1}{2}x + 13$

נבדוק את התשובה בעזרת שרטוט (שימו לב לנקודת החיתוך של שני הישרים):



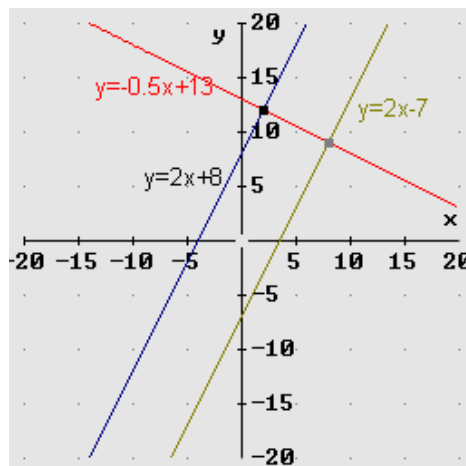
ב. הצבת הביטוי $x - 6$ במקום x במשוואת הישר, תזיז את הישר שש יחידות אופקיות ימינה,

והצבת $y + 3$ במקום y תזיז אותו שלוש יחידות אנכיות כלפי מטה. ההצבה מתבצעת על ידי

הפקודה SUB. שימו לב שניתן לבצע שתי הצבות בבת אחת, ואין צורך לפתוח את תיבת השיח

של SUB בכל פעם מחדש. ראוי לערוך דיון בכיתה על משמעות ההצבה ופעולתה על הישר.

מתקבל ישר חדש:



לחישוב שיעורי נקודת החיתוך של הישר המוזז עם הישר ששורטט בסעיף א, ניעזר ביכולת האלגברית של התוכנה, ונפתור את המערכת המתאימה של שתי משוואות בשני נעלמים.

$$y = 2 \cdot x - 7 \wedge y = -\frac{1}{2} \cdot x + 13$$

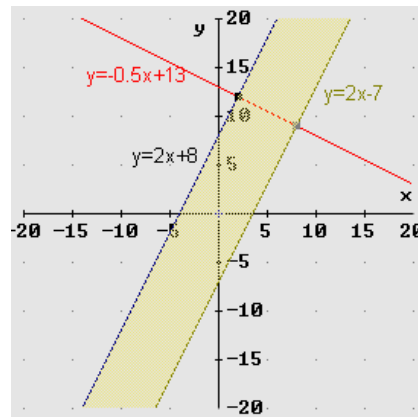
$$\text{SOLVE} \left(y = 2 \cdot x - 7 \wedge y = -\frac{1}{2} \cdot x + 13, [x, y] \right)$$

$$x = 8 \wedge y = 9$$

(מצאנו את שיעורי הנקודה המסומנת באפור בשרטוט לעיל.)

עתה אפשר לנסות הזזות נוספות.

ג. נלמד לצבוע שטח בעזרת התוכנה. לשם כך עלינו להגדיר היטב את השטח שאותו אנו מעוניינים לצבוע בעזרת מערכת אי שוויונים מתאימה.

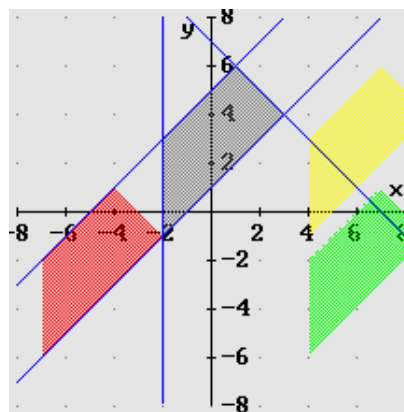


ד. עלינו למצוא ארבע משוואות של ארבעה ישרים היוצרים טרפז כמו בשרטוט. לשאלה זו תשובות אפשריות רבות. נשרטט שרטוט מתאים.

נכתוב מערכת אי שוויונים המתארת את פנים הטרפז, ונצבע אותו.

ה. התנסינו בהזזת ישר בודד, ועתה נזיז את הטרפז כולו. לשם כך נבצע הצבה בכל ארבע המשוואות יחד. ונקיש Plot לשרטוט.

נוכל לבצע הזזות נוספות כרצוננו, 'ולרצף' את המסך בטרפזים. למשל כך:



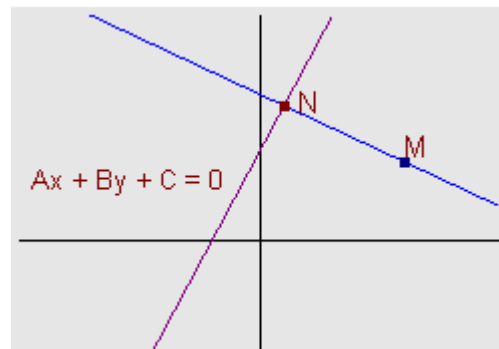
פעילות 2.3 – מרחק נקודה אל ישר

לפניכם משוואה כללית של הישר: $Ax + By + C = 0$ (כאן כלולים גם ישרים מקבילים לציר y). הנקודה M אינה על הישר.

ברצוננו למצוא נוסחה לחישוב המרחק, d , מהנקודה אל הישר.

נוריד אנך (נורמל) מן הנקודה M לישר $Ax + By + C = 0$.

האנך חותך את הישר בנקודה N , כמו בציר:



א. הביעו על ידי A , B ו- C את משוואת האנך ואת שיעורי נקודת החיתוך, N .

תחילה הגדירו למחשב את המשתנים, הקלידו:

$[A :=, B :=, C :=, m1 :=, m2 :=]$

$M := [m1, m2]$

כתבו נוסחה לחישוב המרחק ($d = MN$) מהנקודה M לישר:

הגדירו למחשב פונקציית מרחק מנקודה M לישר שמשוואתו $Ax + By + C = 0$:

הקלידו: $d(A,B,C,m1,m2) :=$ _____

ב. נתונים הישר שמשוואתו $0.8x + 0.6y + 2 = 0$ והנקודות: $A(3, 2)$, $B(-3, -3)$, $C(0, 0)$.

חשבו בעזרת הפונקציה שהגדרתם את המרחק d מכל אחת מן הנקודות הנתונות אל הישר.

להצגת התוצאה כשבר עשרוני האירו את הביטוי ובחרו בסרגל $\approx$ הפקודות של החלון האלגברי

או עברו לכתוב עשרוני Notation:= Decimal

ג. נתון הישר: $-3x + 4y - 15 = 0$. מצאו את המרחק מראשית הצירים אל הישר.

$$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad \text{צורה נורמלית של משוואת ישר היא:}$$

המרחק מראשית הצירים אל הישר שווה ל- $|C|$.

ד. אם נשמיט את סימן הערך המוחלט מנוסחת חישוב המרחק מנקודה לישר נקבל **מרחק מכון**

$$dd(A, B, C, m1, m2) := \frac{A \cdot m1 + B \cdot m2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\text{נסמנו } dd)$$

שרטטו את הישר שמשוואתו: $-5x + 12y + 9 = 0$.

מיינו את הנקודות המוגדרות להלן לפי הסימן של מרחקן המכון אל הישר הנתון:

$$D:=[5,5] \quad E:=[-2,8] \quad F:=[5,-3] \quad O:=[0,0]$$

הישר ששרטטתם מחלק את המישור לשני אזורים. צבעו את האזור הכולל את הראשית.

הקלידו: $-5x + 12y + 9 > 0$ והקישו  לצביעה.

הסבירו כיצד מיקומן של הנקודות מתבטא בתוצאת החישוב של מרחקן המכון אל הישר הנתון.

ה. שרטטו את הישר שמשוואתו: $x + y - 4 = 0$.

מיינו את הנקודות D, E, F, O לפי הסימן של מרחקן מישר זה.

בדוגמאות שבדקתם ראיתם כי המרחק המכון אל ישר של נקודות הנמצאות באותו חצי מישור לגבי הישר – הוא בעל אותו סימן. קל למצוא את המרחק המכון של ראשית הצירים אל הישר (סימנו כסימן C). נסכים, אם כך, לקבוע כי הסימן של מרחק אל ישר של נקודה הנמצאת באותו חצי מישור לגבי הישר כמו הראשית – זהה לסימן של המרחק המכון של הראשית אל הישר.

ו. שרטטו שוב את הישרים שמשוואותיהם: $-5x + 12y + 9 = 0$ ו- $-x - y + 4 = 0$.

הישרים מחלקים את המישור לארבעה אזורים. צבעו כל אזור בצבע שונה.

הקלידו לכל אזור מערכת אי-שוויונים מתאימה, לדוגמה: $-x - y + 4 > 0 \wedge -5x + 12y + 9 > 0$.

והקישו  לצביעה.

באלו אזורים יהיו מרחקיה המכוונים של כל נקודה לשני הישרים - שווי סימן?

באלו אזורים יהיו מרחקיה המכוונים של כל נקודה שנבחר לשני הישרים - שוני סימן?

בדקו את תשובותיכם.

ז. מה המשמעות האלגברית והגיאומטרית של שתי המשוואות הבאות:

$$dd(-5, 12, 9, x, y) = dd(-1, -1, 4, x, y)$$

$$dd(-5, 12, 9, x, y) = -dd(-1, -1, 4, x, y)$$

ח. שרטטו את הישר שמשוואתו: $3x - 4y = 0$.

כיצד נקבע את הסימן של המרחק המכוון של הנקודה (3, 1) אל הישר, מבלי לחשבו בעזרת הנוסחה?

לא נוכל להסתמך על סימן המרחק המכוון של ראשית הצירים אל הישר, מאחר והמרחק מהראשית לישרים העוברים דרך ראשית הצירים $Ax + By = 0$ ($A, B \neq 0$) הוא כמובן 0.

נסכים לבדוק לחלופין את סימנו של המרחק המכוון (dd) מהנקודה (0, 1) לישר הנתון.

מהו המרחק המכוון של הנקודה (0, 1) מהישר?

מהו הסימן של המרחק אל הישר של הנקודה (3, 1)? בדקו על-ידי חישוב.

מהו הסימן של המרחק אל הישר של הנקודה (-2, 0)? בדקו על-ידי חישוב.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name2.3.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 2.3

ראו גם קובץ: [solution2.3.dfw](#)

בפעילות זו נמצא את הנוסחה לחישוב מרחק מנקודה אל ישר. מקרה פרטי כבר חושב, באותם שלבים שבהם תיוצר הנוסחה, בפעילות 1.6. עתה נעסוק במקרה הכללי. שהתוכנה מבצעת עבורנו, כך שנוכל להשתחרר מן 'העבודה השחורה' ולהתמקד ברעיון המוביל לנוסחה כאן בולט מאוד כוחה של התוכנה, שכן הדרך אל הנוסחה רצופה טכניקה אלגברית מייגעת.

א. נתון הישר הכללי: $Ax + By + C = 0$ ונתונה הנקודה M מחוץ לישר. ברצוננו למצוא את הנוסחה

לחישוב המרחק מן הנקודה לישר.

תחילה נגדיר את המשתנים:

$[A :=, B :=, C :=, m1 :=, m2 :=]$

$M := [m1, m2]$

נמצא את משוואת האנך היורד מנקודה M לישר הנתון:

$$y = \frac{B \cdot x}{A} + \left(m2 - \frac{B \cdot m1}{A} \right)$$

נמצא שיעורי נקודת החיתוך של האנך שמצאנו עם הישר הנתון, N, על ידי פתרון מערכת המשוואות המתאימה:

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \wedge y = \frac{B \cdot x}{A} + \left(m2 - \frac{B \cdot m1}{A} \right)$$

$$N := \left[\frac{B^2 \cdot m1 - A \cdot (B \cdot m2 + C)}{A^2 + B^2}, \frac{A^2 \cdot m2 - A \cdot B \cdot m1 - B \cdot C}{A^2 + B^2} \right] \text{ ונקבל:}$$

עתה נוכל לחשב את אורך האנך, MN. כזכור, לחישוב אורך קטע בעזרת התוכנה רושמים ערך מוחלט של הפרש נקודות הקצה של הקטע:

$$|M - N| = \frac{|A \cdot m1 + B \cdot m2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

התוכנה מגישה את הנוסחה באלגנטיות וללא מאמץ! לנוחיות השימוש בהמשך הפעילויות, נגדיר פונקציה לחישוב המרחק מנקודה אל ישר:

$$d(A, B, C, m1, m2) := \frac{|A \cdot m1 + B \cdot m2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ב. נתון הישר: $0.8x + 0.6y + 2 = 0$, כאן: $A = 0.8, B = 0.6, C = 2$. לחישוב המרחק מהנקודה $A(3, 2)$ אל הישר הנתון, נציב: $m1 = 3, m2 = 2$ ובעזרת הפונקציה שהגדרנו:

$$d(0.8, 0.6, 2, 3, 2) = \frac{28}{5}$$

אפשר להציג את התוצאה כשבר עשרוני, על ידי הקלקה על $\approx$ (Approximate) באופן דומה נחשב גם את מרחקי הנקודות האחרות.

$$d(0.8, 0.6, 2, -3, -3) = 2.2$$

$$d(0.8, 0.6, 2, 0, 0) = 2$$

הנקודה האחרונה היא ראשית הצירים. שימו לב שערכו של הפרמטר C במשוואת הישר הנתונה שווה למרחקו של הישר מראשית הצירים. מעניין להעלות לדיון את השאלה: מתי ייצג הפרמטר C את מרחק הראשית אל הישר? ולהגיע למסקנה שהמשוואה הנתונה מיוחדת בכך שהיא מקיימת את התנאי: $A^2 + B^2 = 1$.
ג. נחשב בעזרת פונקציית המרחק את המרחק מהראשית אל הישר $-3x + 4y - 15 = 0$

$$d(-3, 4, -15, 0, 0) = 3$$

ברצוננו למצוא ייצוג אחר לישר, כך שהפרמטר C שלו יהיה שווה למרחקו מן הראשית, כלומר: $C = 3$. לשם כך נחלק את המשוואה הנתונה ב-5. נקבל: $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 3 = 0$.

ד. סימן הערך המוחלט המופיע בנוסחת המרחק מכביד על העבודה. אם נרצה להשמיט את הערך המוחלט עלינו לדעת מראש מהו סימנו של הביטוי הכתוב בתוכו. לנוסחה נקרא "מרחק מכוון".

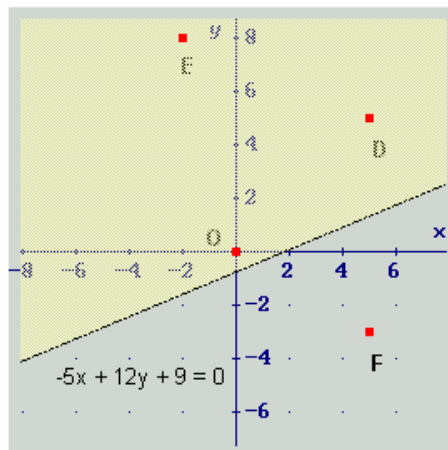
$$dd(A, B, C, m1, m2) := \frac{A \cdot m1 + B \cdot m2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

נוסחה זו מלמדת אותנו לא רק על מרחקה של הנקודה אל הישר, אלא אף על מיקומה של הנקודה ביחס לישר. כדי להבין זאת ניעזר בדוגמאות המופיעות בשאלה. נמין את הנקודות הנתונות לפי מרחקן אל הישר.

לפי ההצבה בפונקציית המרחק המכוון: מרחקן המכוון אל הישר של הנקודות E, D הוא בעל סימן חיובי, ושל F הוא שלילי, ואילו מרחק הנקודה 0, ראשית הצירים, אל הישר הנתון, הוא חיובי. הישר מחלק את המישור לשני אזורים. בכל אחד מן האזורים סימנו של המרחק המכוון מהנקודות אל הישר שונה. במקרה שלנו: כל הנקודות באזור הראשית הצירים – מרחקן המכוון אל הישר חיובי, ואילו כל הנקודות באזור שאינו כולל את ראשית הצירים – מרחקן המכוון אל הישר שלילי.

נצבע את האזור הכולל את הראשית, על ידי כתיבת אי שוויון מתאים:

$$-5 \cdot x + 12 \cdot y + 9 > 0$$



ה. נבדוק סימנם של המרחקים המכוונים מאותן נקודות אל ישר אחר,

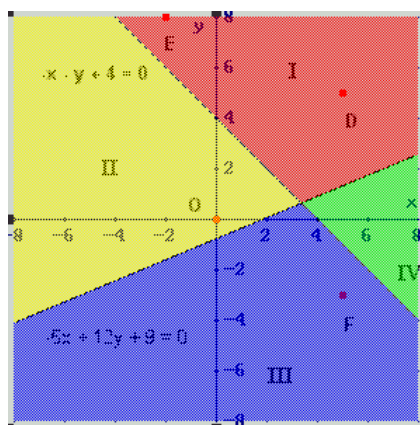
$$\text{שמשוואתו: } x + y - 4 = 0$$

במקרה זה, המרחק המכוון מראשית הצירים אל הישר שלילי.

$$dd(1, 1, -4, 0, 0) = -2 \cdot \sqrt{2}$$

למען האחידות, הסכמנו לקבוע כי הסימן של מרחק אל ישר של נקודה הנמצאת באותו חצי מישור לגבי הישר כמו הראשית – זהה לסימן של המרחק המכוון של הראשית אל הישר. חישוב (ושרטוט) יראו כי המרחק המכוון של F אל הישר הוא בעל סימן שלילי והמרחקים של הנקודות E ו-D אל הישר הם בעלי סימן חיובי.

1. נשרטט מחדש את שני הישרים שטיפלנו בהם. הם מחלקים את המישור לארבעה אזורים. נצבע כל אזור בצבע שונה, על ידי כתיבת מערכות האי שוויונים המתאימות. באזורים השני והרביעי מרחקיה המכוונים של כל נקודה שנבחר משני הישרים יהיו שווי סימן, ואילו באזורים הראשון והשלישי שוני סימן.

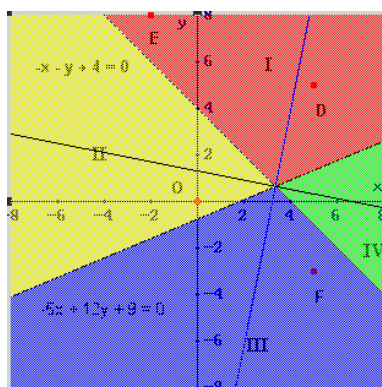


2. המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned} dd(-5, 12, 9, x, y) &= dd(-1, -1, 4, x, y) \\ dd(-5, 12, 9, x, y) &= -dd(-1, -1, 4, x, y) \end{aligned}$$

מייצגות את כל הנקודות שמרחקן אל שני הישרים שווה, כלומר שוויונים כאלו מגדירים שני ישרים החוצים את הזוויות בין הישרים הנתונים. (התלמידים בוודאי ייזכרו כאן בהגדרת חוצה הזווית כמקום גיאומטרי של כל הנקודות שמרחקיהן אל שתי השוקיים, שווים).

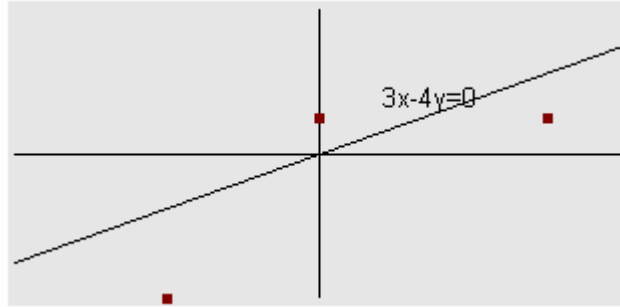
ואכן הפעלת פקודת (Plot) תשרטט את חוצי הזוויות:



השוויון הראשון הוא משוואת חוצה הזוויות כשבאזורים 2, 4 שבהם המרחקים המכוונים שווי סימן, והשוויון השני הוא משוואת חוצה הזוויות שבאזורים 1, 3 שבהם המרחקים המכוונים שוני סימן.

ח. לא נוכל לסיים את הדיון מבלי להתייחס למקרה הפרטי של ישר העובר דרך ראשית הצירים. במקרה זה לא נוכל להשתמש בהסכמה שאימצנו, ואנו נזקקים להסכמה נוספת. נסכים כי עבור ישרים מהמשפחה המוגדרת על ידי המשוואה: $Ax + By = 0$ ($A, B \neq 0$) הנקודה הקובעת תהיה $(0, 1)$.

המרחק המכוון מהנקודה $(0, 1)$ אל הישר: $3x - 4y = 0$ הוא שלילי.



המרחקים של הנקודות $(1, 4)$ $(-2, 0)$ אל הישר גם הם בעלי סימן שלילי.

המרחקים של הנקודות $(3, 1)$ $(-2, -4)$ אל הישר הם בעלי סימן חיובי.

פעילות 2.4 – שאלות

א. הנקודה K מונחת על הישר $-5x + 12y + 9 = 0$ ברביע הראשון.

המרחק של נקודה K אל הישר: $-x - y + 4 = 0$ הוא $4\sqrt{2}$.

מהם שיעורי הנקודה K? בנו שרטוט מתאים.

נתחו את הפתרון וארגנו אותו.

ב. קדקודי המשולש ABC הם: $C = [25/3, 3]$, $B = [-5, 13]$, $A = [-5, -7]$

מהו מרכז המעגל החסום במשולש?

ג. מרחקה של נקודה $[x, y]$ אל ישר מבוטא על-ידי הביטוי $\frac{|2x-3|}{2}$.

מהי משוואת הישר? הדגימו בשרטוט שלוש נקודות הנמצאות במרחק של 4 יחידות מהישר.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name2.4.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 2.4

ראו גם קובץ: [solution2.4.dfw](#)

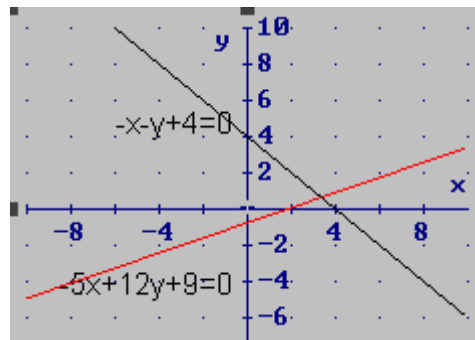
בפעילות זו נפתור שאלות בסגנון השאלות המופיעות במבחני הבגרות. רצוי להכין תכנית לפתרון, ולהחליט איזה שלב כדאי לפתור ידנית ואיזה בעזרת התוכנה. לעתים התוכנה תחסוך 'עבודה שחורה' ותאפשר להפנות את מלוא הריכוז לניתוח הבעיה ולהבנתה, ולעיתים תסייע בבדיקת הפתרונות שהתקבלו בעזרת שרטוטים.

א. הנקודה K מונחת על הישר שמשוואתו $-5x + 12y + 9 = 0$, נביע את שיעוריה על ידי x, ונחשב את מרחקה אל הישר $-x - y + 4 = 0$:

$$K := \left[x, \frac{5 \cdot x - 9}{12} \right]$$

$$dd\left(-1, -1, 4, x, \frac{5 \cdot x - 9}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} \cdot (57 - 17 \cdot x)}{24}$$

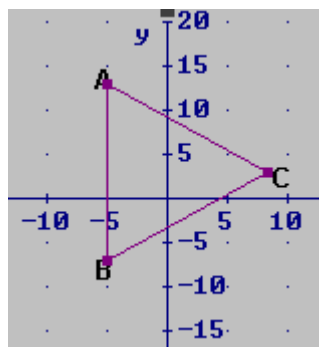
הסימן של המרחק המכוון של ראשית הצירים אל הישר הוא חיובי. על-סמך הנתונים (ובעזרת השרטוט) הנקודה K נמצאת ברביע הראשון באזור שאינו כולל את ראשית הצירים (מדוע?) – לפיכך סימן המרחק שלילי.



$$\frac{\sqrt{2} \cdot (57 - 17 \cdot x)}{24} = -4 \cdot \sqrt{2}$$

פתרון המשוואה נותן: $k(9, 3)$

ב. נתון המשולש ABC:



משוואת AB: $x+5=0$ סימן המרחק המכוון של הראשית אל הישר חיובי
 משוואת BC: $3x+4y-37=0$ סימן המרחק המכוון של הראשית אל הישר שלילי
 משוואת AC: $-3x+4y+13=0$ סימן המרחק המכוון של הראשית אל הישר חיובי

מרכז המעגל החסום במשולש (x, y) נמצא במרחקים שווים אל שלושת הצלעות. נכתוב משוואות מתאימות ונפתור אותן:

```
SOLVE(dd(-3, 4, 13, x, y) = - dd(3, 4, -37, x, y), [x, y], Real)
y = 3
```

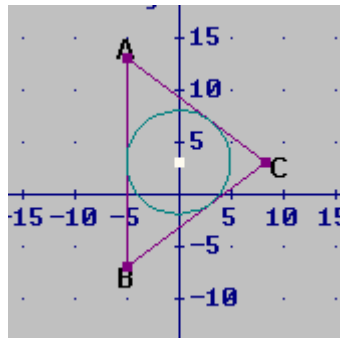
$$\text{dd}(-3, 4, 13, x, y) = \text{dd}(1, 0, 5, x, y)$$

```
SOLVE(dd(-3, 4, 13, x, y) = dd(1, 0, 5, x, y), [x, y], Real)
```

$$2 \cdot x - y + 3 = 0$$

נקבל: מרכז המעגל הוא: $(0, 3)$ ומשוואתו: $x^2 + (y-3)^2 = 25$

נבדוק את התשובה על ידי שרטוט:



ג. קל לראות שהביטוי $\frac{|2x-3|}{2}$ מבטא את המרחק מהנקודה $[x, y]$ אל הישר שמשוואתו:

2x - 3 = 0. נבדוק זאת בעזרת פונקציית המרחק. (תזכורת: אם אנו עובדים בקובץ פתרונות חדש, עלינו להגדיר מחדש את הפונקציות הנחוצות לנו.)

$$d(-2, 0, 3, x, y) = \frac{|2 \cdot x - 3|}{2}$$

אנו מחפשים נקודות שמרחקן אל הישר הוא 4 יחידות. נראה שתי דרכים לפתרון:
דרך א: נפצל לשני מקרים ונפתור מערכת "וגם":

$$\frac{2 \cdot x - 3}{2} = 4 \vee \frac{2 \cdot x - 3}{2} = -4$$

$$\text{SOLVE} \left(\frac{2 \cdot x - 3}{2} = 4 \vee \frac{2 \cdot x - 3}{2} = -4, x \right)$$

דרך ב: נפתור את המשוואה המבוטאת על ידי ערך מוחלט, עבור מספרים ממשיים:

$$\frac{|2 \cdot x - 3|}{2} = 4$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{|2 \cdot x - 3|}{2} = 4, x, \text{Real}\right)$$

קיבלנו שני פתרונות אפשריים עבור x : $x = 5.5 \vee x = -2.5$

מכיוון שהישר מקביל לציר ה- y , כל ערך של y שנבחר לשיעורי ה- x שמצאנו יקיים את הדרישה.

