10. חתכי חרוט למורה

מבוא

ביחידה זו נברר למה כל העקומות שפגשנו ביחידות הקודמות נכנסות אל תוך מסגרת מאחדת, הנקראת "חתכי חרוט". היוונים הקדומים כבר חקרו לעומק את הצורות ההנדסיות הקלאסיות במישור ובמרחב. אנחנו נחקור אותן עם המחשב.

את העבודה נעשה בעזרת Derive 6 על מנת להשתמש בתכונות גרפיות מיוחדות שלו. נעבוד גם עם התוכנה הגרפית DPGraph: כדי לפתוח את הקבצים שיצרנו בעזרת תוכנה זו, ניתן להוריד את ה-Viewer חינם מן האתר http://www.dpgraph.com - כך תוכלו לראות את השרטוטים ולהפעיל את האנימציות, הנחיות לעבודה עם התוכנה DPGraph מופיעות בנספח בסוף היחידה.

רשימת הפעילויות:

פעילות 10.1 – התמצאות בחלון גרפי תלת-מימדי

פעילות 10.2 – חתך חרוט

פעילות 10.3 – חיתוך של חרוט עם מישור משתנה

פעילות 10.4 – חתכי חרוט מנוונים

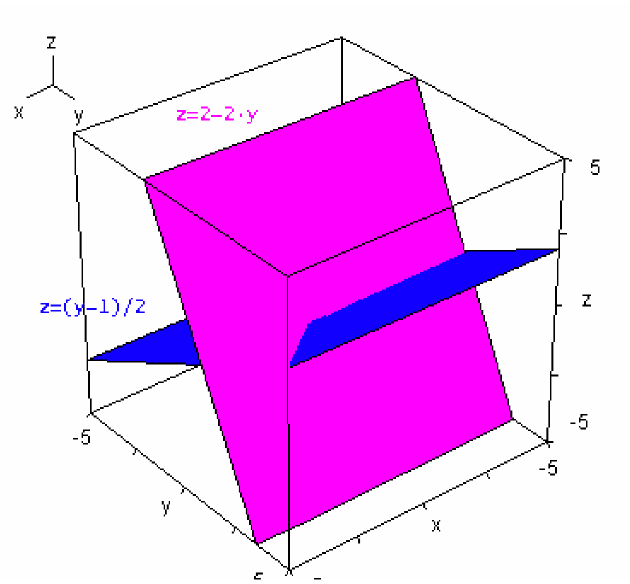
נספח: החיתוך של חרוט עם מישור משתנה – בעזרת DPGraph

פעילות 10.1 – התמצאות בחלון גרפי תלת-מימדי

משוואה קרטזית של מישור היא משוואה מהצורה $ax + by + cz + d = 0$ שבה המקדמים a, b, c לא יכולים להיות שווים ל- אפס בו-זמנית.

א. אם $a = 0$, המישור מקביל לציר ה- x.

לדוגמא משוואות המישורים בשרטוט הבא הן $2y + z – 2 = 0$ ו- $y – 2z – 1 = 0$.



השלימו:

אם $b=0$, המישור מקביל לציר ה- ______.

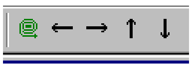
אם $c=0$, המישור מקביל לציר ה- ______.

אם $d=0$, המישור עובר דרך ראשית הצירים.

הדגימו בשרטוט.

הקליקו בסרגל הפקודות על  לפתיחת חלון גרפי תלת-ממדי.

הקישו על  לשרטוט.

בעזרת אחד הכפתורים  ניתן לסובב את מערכת הצירים ולראות את המשטח ששרטטתם מכיוונים שונים. נסו זאת.

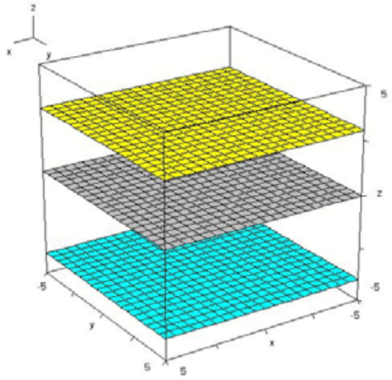
<u>שינוי צבע השרטוט:</u>

הקליקו בתוך השרטוט ויפתח תפריט לשינויים.

להוספת משוואת המישור לשרטוט באופן אוטומטי: Options > Annotate New Plots

ב. המישור מקביל למישור xy אם, ורק אם, יש לו משוואה מהצורה $z = k$.

לדוגמה: משוואות המישורים באיור הבא הן $z = 3$, $z = 0$, $z = -4$.



השלימו:

המישור מקביל למישור yz אם, ורק אם, יש לו משוואה מהצורה ______.

שרטטו שלושה מישורים כאלה.

המישור מקביל למישור xz אם, ורק אם, יש לו משוואה מהצורה ______.

שרטטו שלושה מישורים כאלה.

שרטטו את שלושת מישורי המערכת (דהיינו מישור xy, מישור yz ומישור xz) באותו שרטוט.

ג. מישורים מקבילים:

נתונים שני מישורים $P: ax + by + cz + d = 0$ ו- $P': a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

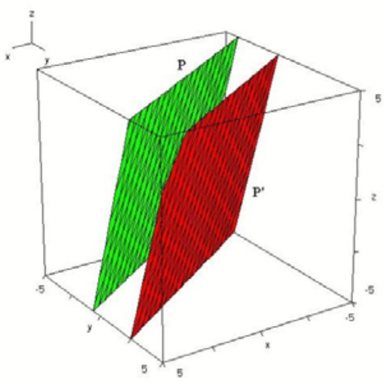
הם מקבילים אם, ורק אם, שלשות המקדמים (a, b, c) ו- (a', b', c') הן פרופורציונליות.

לדוגמה:

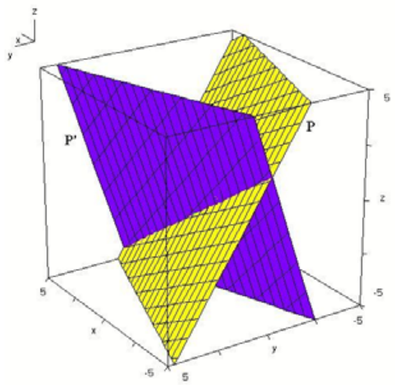
נתון $P: 2x - 3y + z - 7 = 0$ ו- $P': 4x - 6y + 2x + 5 = 0$. הם מקבילים (ראו שרטוט א').

נתון $P: x + 3y + 2z + 1 = 0$ ו- $P': 2x - 6y + 2z + 5 = 0$. הם לא מקבילים (ראו שרטוט ב').

(א)



(ב)



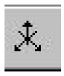
שימו לב: בין שני השרטוטים, סובבנו את מערכת הצירים.

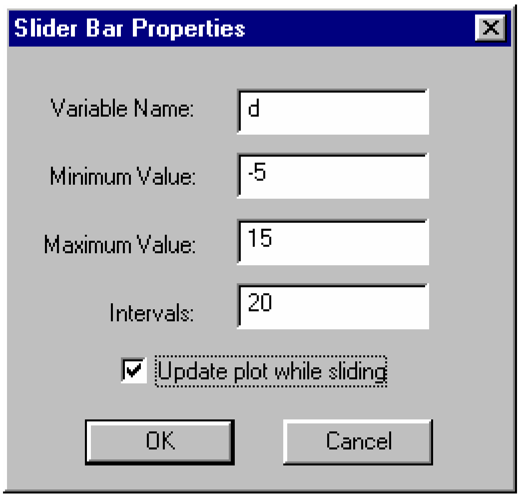
<u>תרגיל</u>: נתון מישור שמשוואתו היא $x - 2y + y - 2 = 0$. בעזרת Derive, מצאו את המישור המקביל למישור הנתון והעובר דרך הנקודה $(-1,3,2)$.

ד. חקרו את השפעת המקדמים של המשוואה.

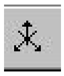
<u>השפעת המקדם d</u>.

1. רשמו בחלון האלגברי את המשוואה $x + y + z + d = 0$.

2. בעזרת הכפתור  עברו לחלון ה– 3D. לפני שתוכלו לשרטט מישורים השייכים למשפחה הקישו בחלון הגרפי על Insert>Slider Bar. נפתחת תיבת שיח:

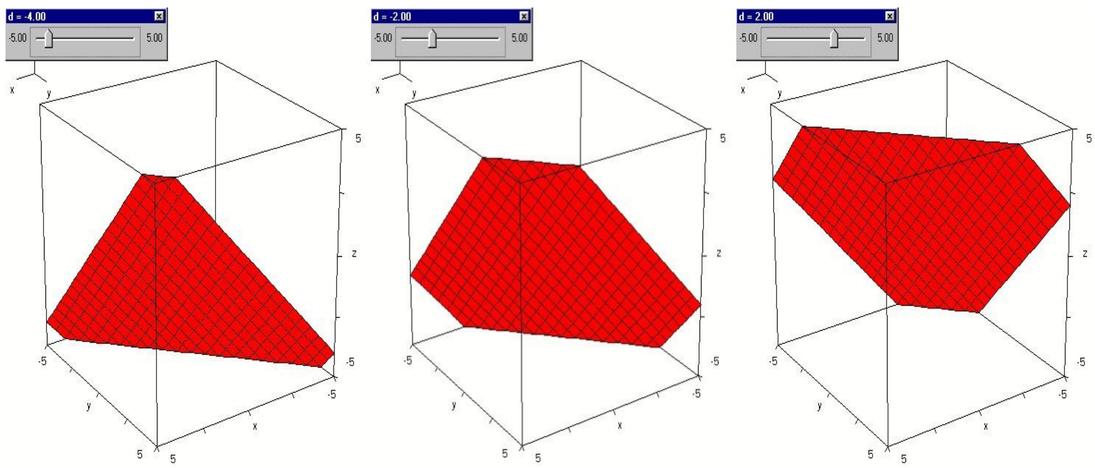


כשם משתנה רשמו את d וסמנו בקליק במשבצת התחתונה שאתם מבקשים עדכון השרטוט תוך כדי גלישת ה-Slider Bar (בעברית סרגל גלישה). את הנתונים המספריים, הכניסו לפי שקולכם. בתמונה לעיל, שינינו את בחירות המחדל של Derive.

3. עכשיו הקישו שוב על הכפתור  בחלון ה- 3D. מה אתם מקבלים?

4. לאט לאט הזיזו את הכפתור הנייד של הסרגל. מה קורה?

בעצם מה שבצענו הוא "הזזה מקבילה של המישור". להלן דוגמאות:



שימו לב: הצורות ה"מוזרות" נובעות מזה ששמרנו על מסגרת התיבה.

<u>העברת שרטוט מהחלון הגרפי לחלון האלגברי:</u>

מתפריט File (בחלון הגרפי) בחרו Embed. תוכן החלון הגרפי יעבור לחלון האלגברי. בהקלקה על התמונה בחלון האלגברי יפתח החלון הגרפי עם התמונה (ואז אפשר לעדכן את התמונה).

<u>השפעת המקדם a</u>

1. רשמו את המשוואה $ax + y + z + 1 = 0$ בחלון אלגברי חדש.
2. חזרו על הסעיפים של החלק הקודם , עם ההתאמות הדרושות (a במקום d כמשתנה עבור סרגל הגלישה).
3. מה קורה?

<u>השפעת המקדם b</u>

1. רשמו את המשוואה $x + by + z +1= 0$ בחלון אלגברי חדש.
2. חזרו על הסעיפים ב' – ה' לעיל , עם ההתאמות הדרושות (b במקום d כמשתנה עבור סרגל הגלישה).
3. מה קורה?

ה. שרטטו באותו שרטוט את המישורים הנתונים ע"י המשוואות הבאות:

$$x + y + z +1 = 0,\ \ x - y + z + 1 = 0,\ -x + y + z + 1 = 0,\ -x - y + z + 1 = 0$$

זהו בשרטוט כל אחד מהמישורים.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name10.1.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 10.1

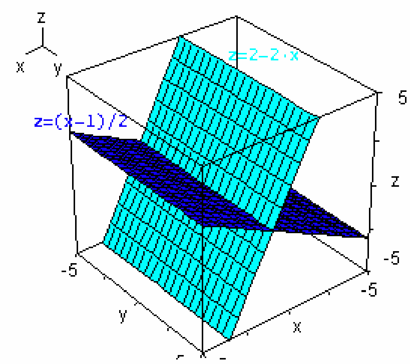
ראו גם קובץ: solution10.1.dfw

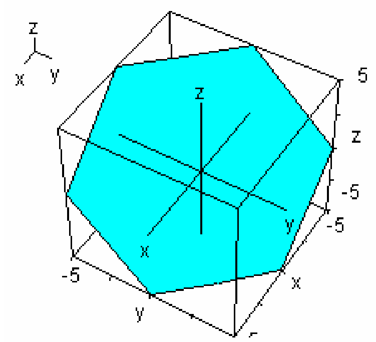
א. אם במשוואת המישור $ax + by + cz + d = 0$, $a = 0$ המישור מקביל לציר ה- x.

אם $b = 0$, המישור מקביל לציר ה- y.

אם $c = 0$, המישור מקביל לציר ה- z.

אם $d = 0$, המישור עובר דרך ראשית הצירים.





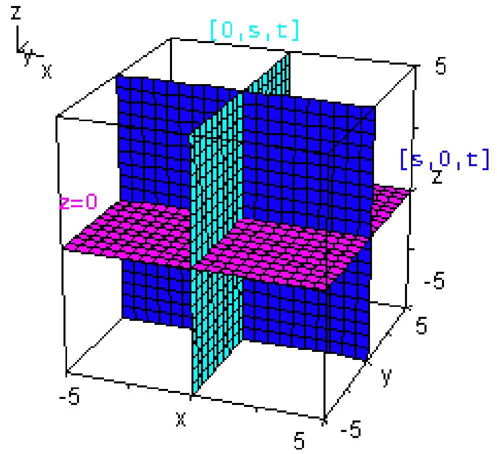
ב. המישור מקביל למישור xy אם, ורק אם, יש לו משוואה מהצורה $z = k$.

המישור מקביל למישור yz אם, ורק אם, יש לו משוואה מהצורה $x = k$.

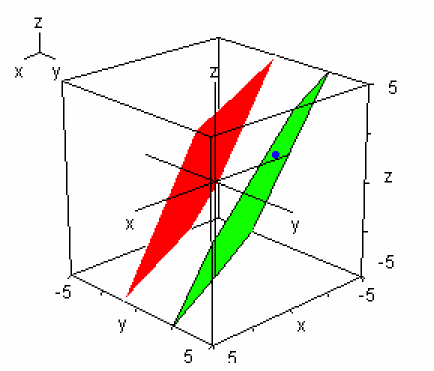
המישור מקביל למישור xz אם, ורק אם, יש לו משוואה מהצורה $y = k$.

להלן שרטוט שלושת מישורי המערכת: $x = 0, y = 0, z = 0$

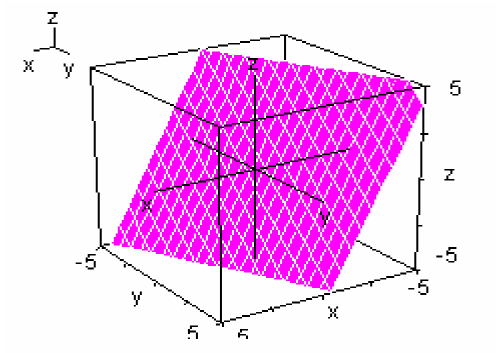
שימו לב שהמישורים $x = 0, y = 0$ נרשמו על-ידי התוכנה בהצגתם הפרמטרית.

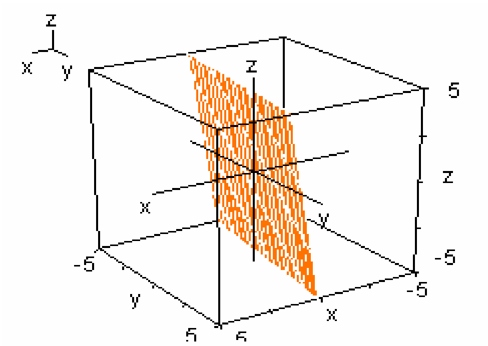


ג. פתרון התרגיל: נציב במשוואת מישור $x - 2y + z + d = 0$ את שיעורי הנקודה הנתונה $(-1, 3, 2)$ ונמצא כי $d = 5$. משוואת המישור המקביל למישור הנתון היא: $x - 2y + z + 5 = 0$.

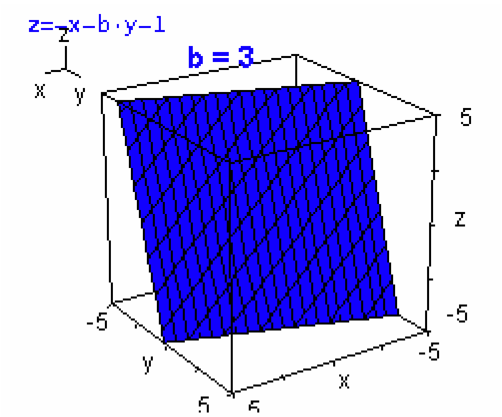


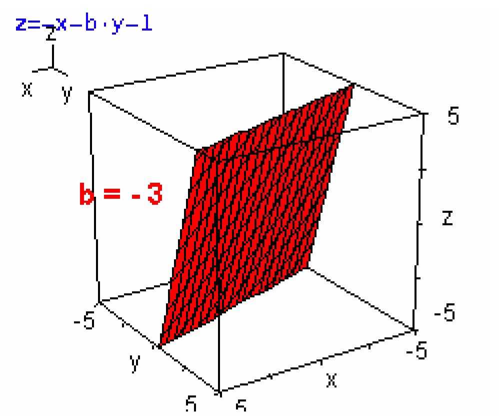
ד. השפעת המקדם a: ראינו לעיל כי כאשר $a = 0$ המישור מקביל לציר- x. בשרטוטים להלן רואים את סיבוב המישור ביחס לציר - x עבור $a = -7$ (מימין) ו- $a = 2$ (משמאל).



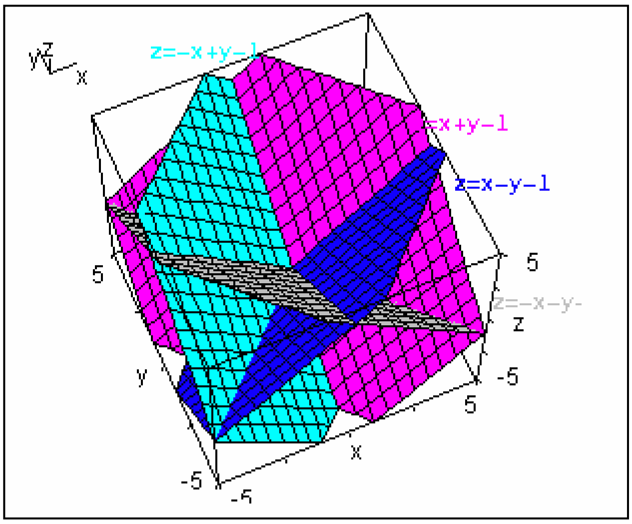


השפעת המקדם b: ראינו לעיל כי כאשר $b = 0$ המישור מקביל לציר- y. בשרטוטים להלן רואים את סיבוב המישור ביחס לציר - y עבור $b = -3$ (מימין) ו- $b = 3$ (משמאל).





ה.   ניתן לזהות את המישורים בשרטוט לפי צבעי הכתוביות המתאימים לצבעי השרטוט (בצד העליון) ולפי וקטורי יחידה המאונכים למישורים (ראו שרטוט בקובץ Derive).

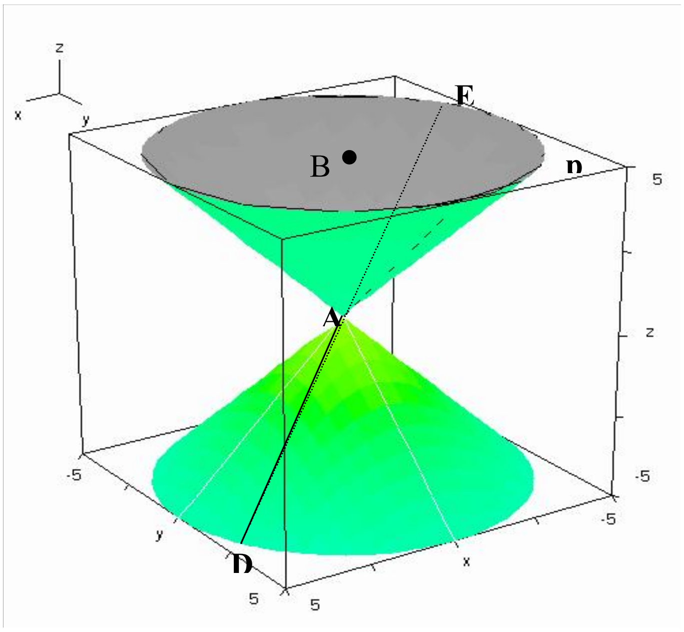


פעילות 10.2 – חתך חרוט

הקדמה: חרוט

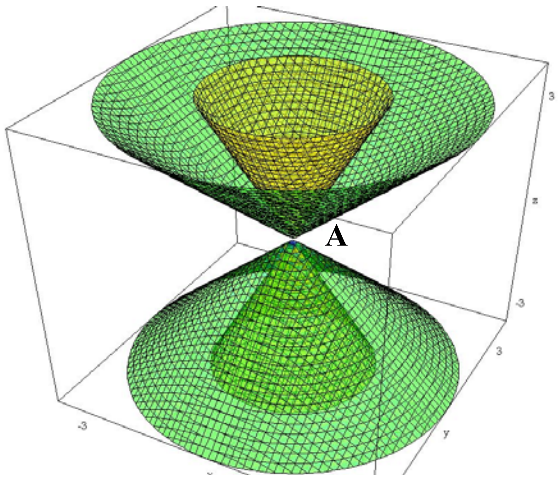
במרחב התלת-מימדי נתונים מישור P ונקודה A לא על P . במישור P נתונה עקומה C. המשטח הנוצר ע"י כל הישרים העוברים דרך A ונקודה אחת של C נקרא *חרוט* (באנגלית conus או cone), הנקודה A היא *הקדקוד* של החרוט. ישר העובר דרך A וחותך את C נקרא *קו יוצר* של החרוט.

אם העקומה C היא מעגל בעלת מרכז B כך שהישר AB מאונך ל-P, קוראים לחרוט C בשם *חרוט של סיבוב* כי הוא נוצר מסיבוב הישר DE מסביב לישר AB הנקרא ציר החרוט.



חרוט של סיבוב עם שניים מיוצריו

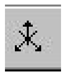
במישור נתון נעיין בשני מעגלים בעלי אותו מרכז ורדיוסים שונים. על ישר מאונך למישור זה העובר דרך מרכז המעגלים נבחר נקודה A. החרוטים הנבנים עם קדקוד A והנשענים על המעגלים הם שונים זה מזה: אחד מהם "פתוח" יותר מהשני, כפי שרואים בשרטוט הבא:

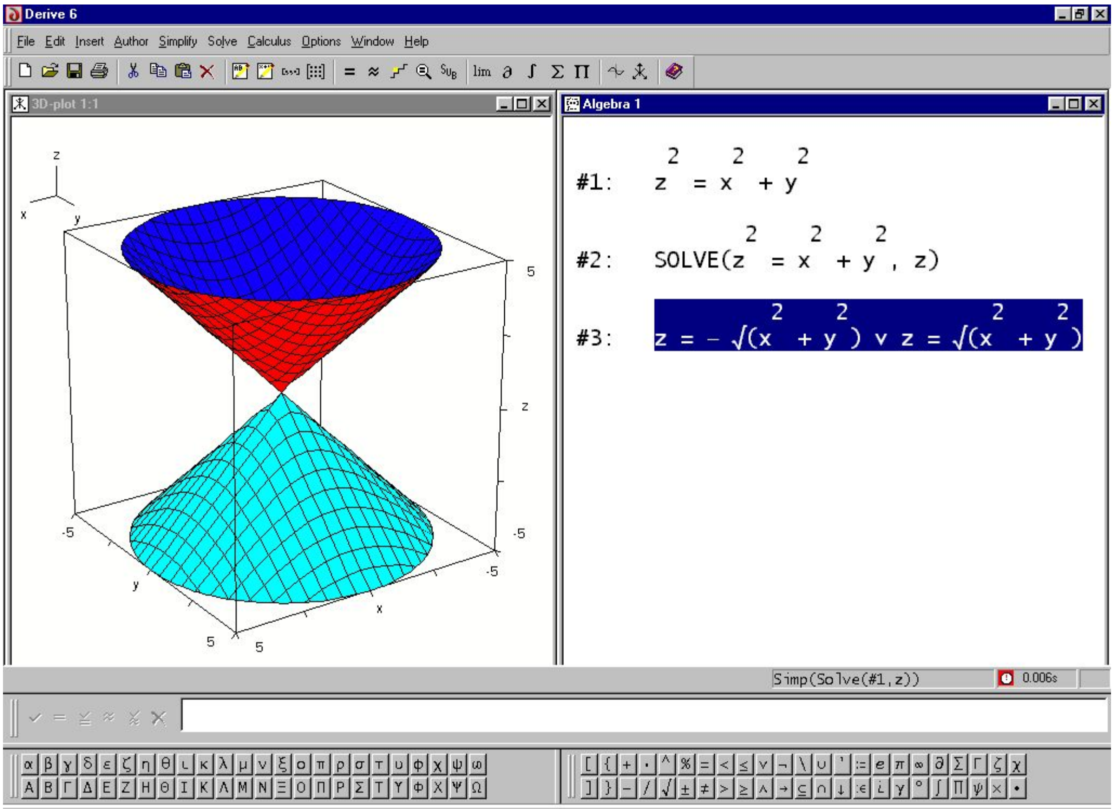


מה שנלמד מעתה הוא נכון עבור כל חרוט של סיבוב, אבל נעבוד במקרה המיוחד, הנקרא *החרוט הסטנדרטי* שמשוואתו היא $x^2+y^2=z^2$.

Derive יודע לשרטט גרף של פונקציה של שני משתנים, אבל לא גרף נתון ע"י משוואה המגדירה את z כפונקציה סתומה של x ו- y .

לכן, נבטא את z כפונקציה של x ו- y בעזרת הפקודה Solve. מה מתקבל?

עכשיו אפשר לשרטט  את שתי יריעות החרוט בחלון ה- 3D .



הצבעים השונים מראים ש- Derive שרטט את החרוט כאיחוד של שני חלקים, אשר ייקראו *יריעות*.

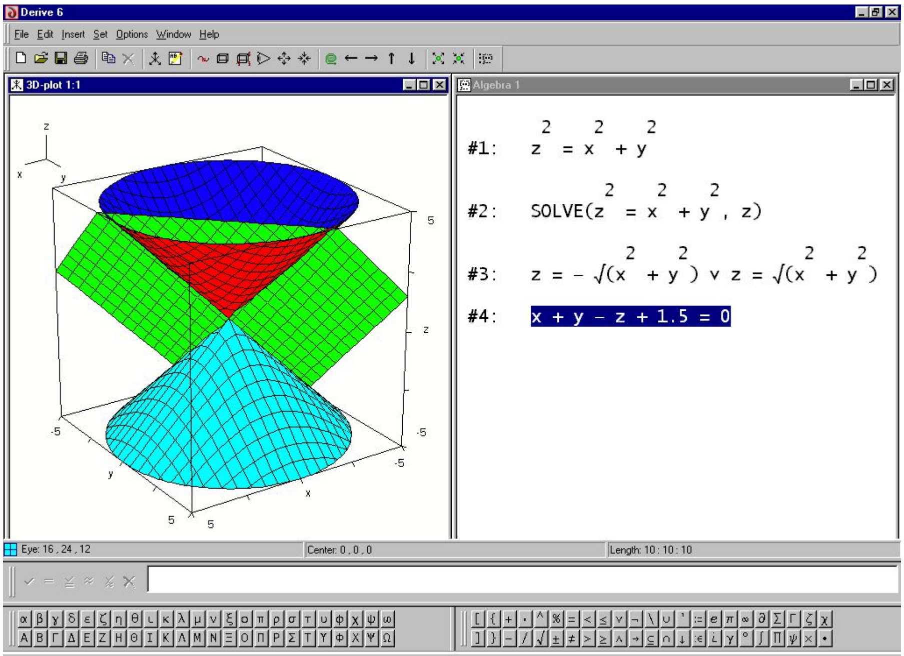
שימו לב, בניגוד להרגל היום יומי, במתמטיקה חרוט מורכב משתי יריעות!

נזכור שמשוואה קרטזית של מישור במרחב היא $ax+by+cz+d=0$. *חתך החרוט* הוא איפוא קבוצת האמת של מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases}.$$

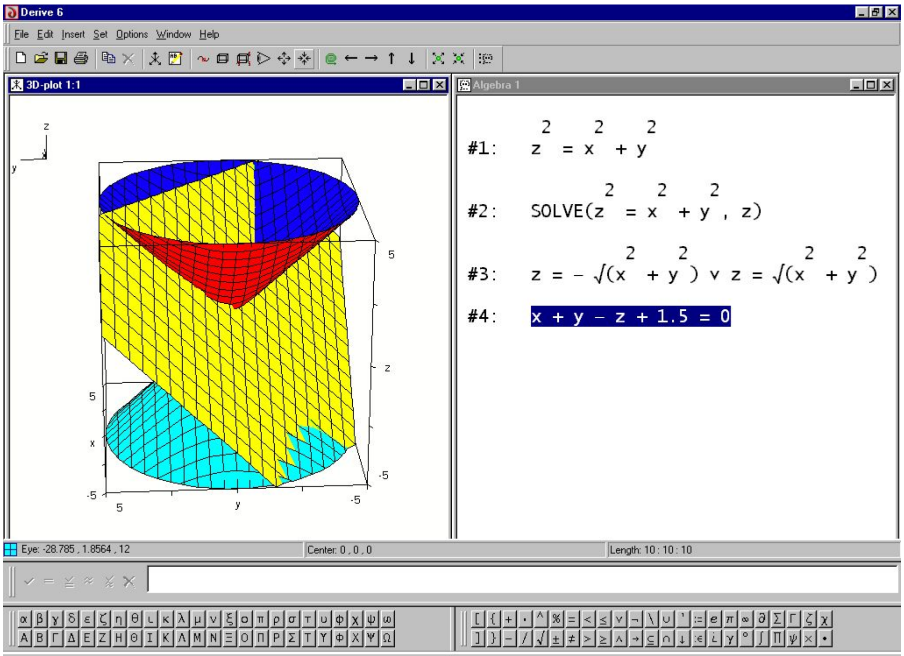
א. שרטטו את החרוט הסטנדרטי.

שרטטו אותו באותו חלון את המישור שמשוואתו היא $x+y-z+1.5=0$..

שרטטם את המישור? אם כן, מה אתם רואים?



כדי לשפר את המצב, סובבו את השרטוט בעזרת הכפתור  בחלון ה- 3D. לחיצה נוספת עוצרת את התנועה.



המישור מופיע בשני השרטוטים הנ"ל בשני צבעים שונים. זה משום שאנו רואים אותו משני "צדדים" שונים. Derive מאפשר להבדיל בין צד עליון לצד תחתון (או צד פנימי וצד חיצוני). ראינו כבר את זה עם החרוט עצמו.

מה אתם רואים תוך כדי סיבוב? האם אתם רואים את החיתוך של החרוט והמישור?

נקודות החיתוך של המישור עם החרוט מהוות קבוצת האמת של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y - z + 1.5 = 0 \end{cases}$$

על מנת לראות את החיתוך יותר טוב, נעבור ל*הצגה פרמטרית* של החיתוך של המישור והחרוט.

בטאו את y, z בעזרת x: $[x, \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_]$

שרטטו את העקומה בחלון הגרפי. מהי עקומה המתקבלת?

ב. נחקור עתה את ההטלה על מישור xy של חתך החרוט שמצאנו. לכל נקודה (x, y, z) במרחב נתאים את הנקודה $(x, y, 0)$. רשמו את ההצגה הפרמטרית של ההטלה: $[x, \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, 0]$ והוסיפו אותה לשרטוט. הוסיפו גם את שרטוט המישור $z = 0$. מה אתם רואים?

נעבוד עתה בדרך אחרת. ממערכת המשוואות $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y - z + 1.5 = 0 \end{cases}$

נובעות המשוואות הבאות, בנעלמים x ו- y בלבד:

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = x + y + 1.5$$

הפכו את המשוואה הזאת למשוואה פולינומיאלית בשני משתנים (רמז: תחילה, מעלים את שני האגפים לחזקה השנייה).

ג. *ההטלה* על מישור xy היא הפונקציה אשר לכל נקודה במרחב ששיעוריה הם (x, y, z) מתאימה את הנקודה ששיעוריה הם $(x, y, 0)$. התוצאה של ההטלה נקראת *היטל*.

חקרו את ההיטלים של חתכי החרוט הסטנדרטי עם המישורים הנתונים להלן.

1. $x + z - 1 = 0$
2. $x - y + 4z - 10 = 0$

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name10.2.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 10.2

ראו גם קובץ: solution10.2.dfw

א. המישור שמשוואתו $x + y - z + 1.5 = 0$ חותך את שתי היריעות של החרוט. התבוננות בשרטוט תוך כדי סיבוב מעלה את ההשערה כי חתך החרוט הוא היפרבולה.
על מנת לראות את החיתוך יותר טוב, נעבור *להצגה פרמטרית* של החיתוך של המישור והחרוט: נבטא את y, z בעזרת x.

$$x^2 + y^2 = z^2 \wedge x + y - z + 1.5 = 0$$

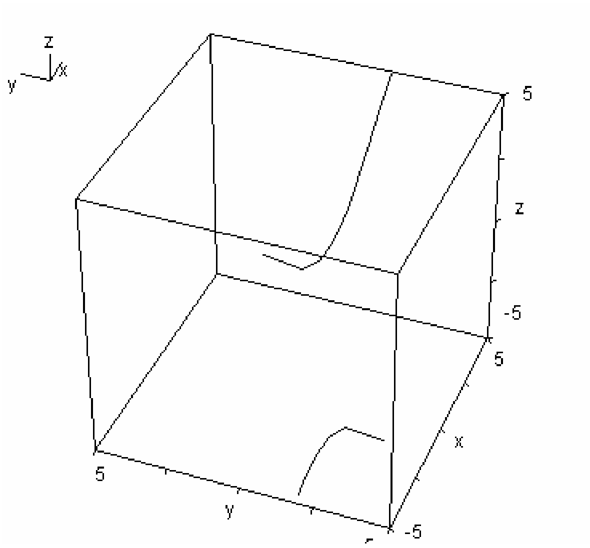
$$\text{SOLVE}(x^2 + y^2 = z^2 \wedge x + y - z + 1.5 = 0, [y, z])$$

$$y = \frac{9}{4\cdot(2\cdot x + 3)} - \frac{3}{2} \wedge z = \frac{8\cdot x^2 + 12\cdot x + 9}{4\cdot(2\cdot x + 3)}$$

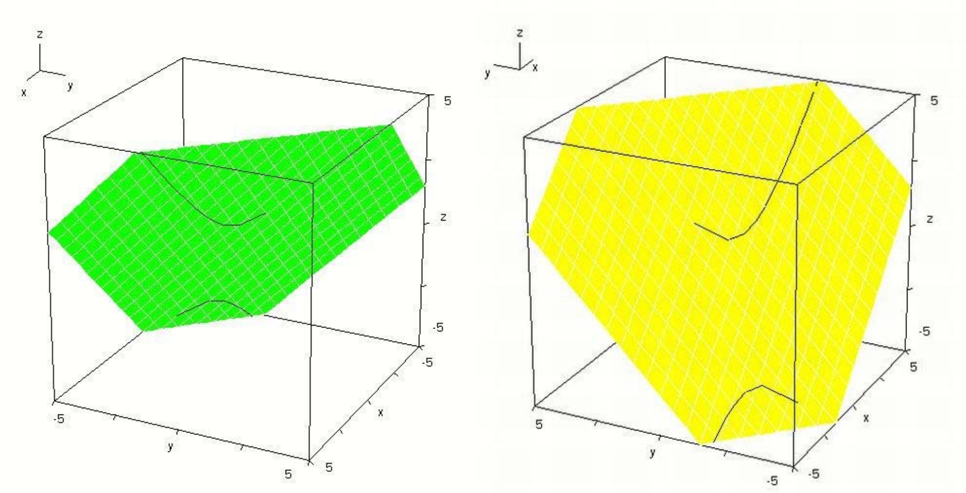
$$\left[x, \frac{9}{4\cdot(2\cdot x + 3)} - \frac{3}{2}, \frac{8\cdot x^2 + 12\cdot x + 9}{4\cdot(2\cdot x + 3)}\right]$$

כמובן המרכיבים של הוקטור הזה הם $[x, y, z]$.

להלן שרטוט העקומה.



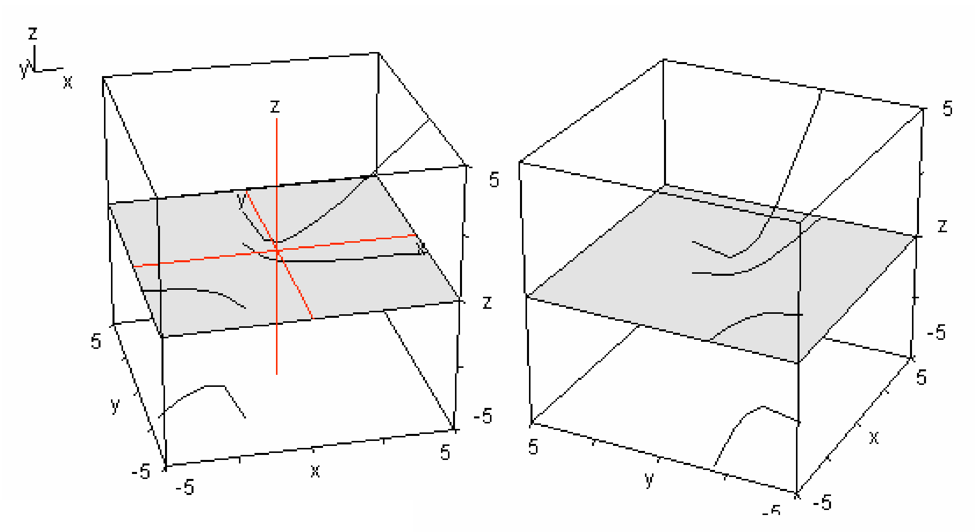
הוספנו לחלון הגרפי את שרטוט המישור הנתון. להלן העקומה משורטטת על המישור משני נקודות מבט: ראיה מעל המישור (צד ימין) וראיה מתחת למישור (צד שמאל):



הערה: שימו לב לכווני הצירים. הם שונים בשני השרטוטים.

ב. ההצגה הפרמטרית של ההטלה של העקומה על מישור xy היא: $[x, \frac{9}{4(2x+3)} - \frac{3}{2}, 0]$.

נשרטט, נוסיף את צירים ונסובב. אכן נראית היפרבולה על מישור xy.



נבדוק זאת בדרך אחרת. ממערכת המשוואות $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y - z + 1.5 = 0 \end{cases}$

נובעות המשוואות הבאות, בנעלמים x ו- y בלבד:

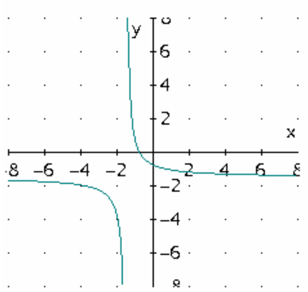
$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = x + y + 1.5$$

נהפוך את המשוואה הזאת למשוואה פולינומיאלית בשני משתנים (מעלים את שני האגפים לחזקה השנייה) ונקבל:

$$8\cdot x\cdot y + 12\cdot x + 12\cdot y + 9 = 0$$

משוואה הזו מתארת את ההטלה על מישור xy של חתך החרוט. *ההטלה* על מישור xy היא הפונקציה אשר לכל נקודה במרחב ששיעוריה הם (x, y, z) מתאימה את הנקודה ששיעוריה הם $(x, y, 0)$. התוצאה של ההטלה נקראת *היטל*.

להלן שרטוט ההיטל:



נראית היפרבולה שוות שוקיים.

נמצא את האסימפטוטות על ידי שנבטא את x ע"י y ואת y ע"י x.

```
SOLVE(8·x·y + 12·x + 12·y + 9 = 0, y)
```

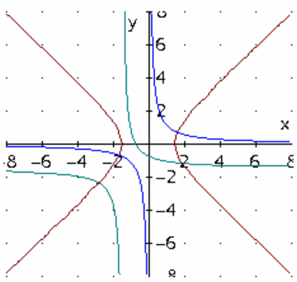
$$y = -\frac{3\cdot(4\cdot x + 3)}{4\cdot(2\cdot x + 3)}$$

```
SOLVE(8·x·y + 12·x + 12·y + 9 = 0, x)
```

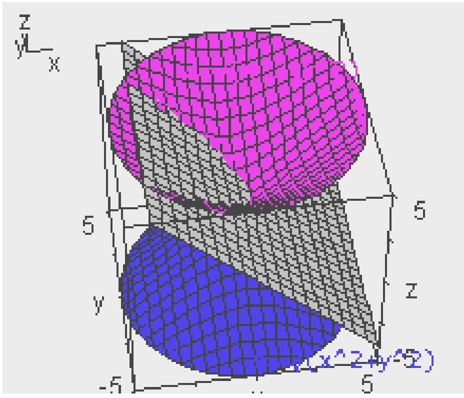
$$x = -\frac{3\cdot(4\cdot y + 3)}{4\cdot(2\cdot y + 3)}$$

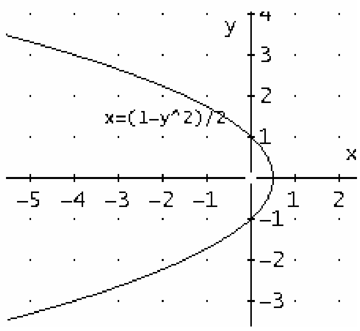
משוואות האסימפטוטות הן: $y = -1.5$ $x = -1.5$.

על מנת לקבל היפרבולה חופפת לזו שקיבלנו בעלת משוואה קנונית נזיז את ההיפרבולה כך שמרכזה יעבור לראשית הצירים ונסובב ב- 45^0. נקבל היפרבולה שוות שוקיים שמשוואתה: $4x^2 - 4y^2 - 9 = 0$ (ראו בקובץ Derive שורות #24-#27). הסברים לטרנספורמציית הסיבוב מופיעים בפעילות 8.4.

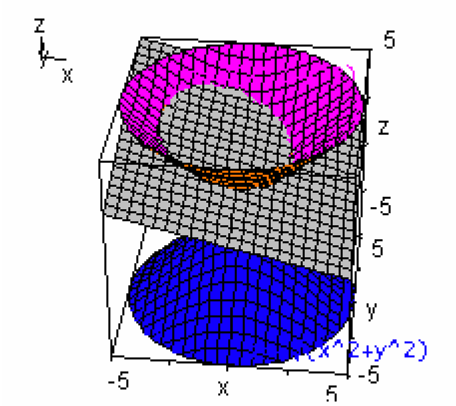


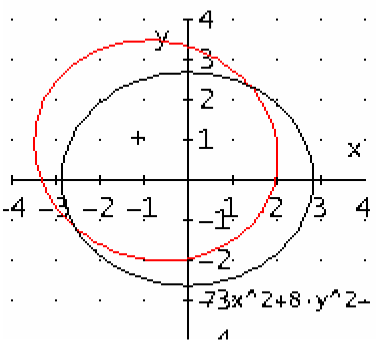
ג. בשרטוט מימין להלן רואים את חתך החרוט הסטנדרטי עם המישור שמשוואתו $x + z - 1 = 0$. המישור חותך רק את היריעה העליונה ונראה כפרבולה. ואמנם הוא מקביל לקו היוצר של החרוט. נמצא את משוואת ההיטל של חתך החרוט: $1 - x = \pm\sqrt{(x^2 + y^2}$, על-ידי העלאה לריבוע ופישוט מתקבלת משוואת פרבולה $-2x - y^2 + 1 = 0$. להלן שרטוט הפרבולה במישור (השוו עם חתך החרוט בשרטוט התלת מימדי.





כך נקבל כי ההיטל של חתך החרוט הנוצר על-ידי המישור שמשוואתו היא $x - y + 4z - 10 = 0$ הוא אליפסה שמשוואתה הקנונית $7x^2 + 8y^2 - 400/7 = 0$.





בדוגמאות לעיל בחרנו את משוואות המישורים כך שגודל זווית הסיבוב ביחס למערכת הצירים הסטנדרטית הוא 45^0. בקובץ Derive (שורות #53-#63) תוכלו לראות טיפול במשוואה כללית בשני נעלמים מהמעלה השנייה: $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$

פעילות 10.3 – חיתוך של חרוט עם מישור משתנה

א. רשמו משוואת החרוט הסטנדרטי ושרטטו אותו בחלון הגרפי התלת מימדי.

נתונה משפחת מישורים על-ידי המשוואה הפרמטרית: $x + az - 1 = 0$.

חקרו בעזרת סרגל גלישה כיצד משתנה צורת חתך החרוט עם המישורים, כאשר a משתנה.

להוספת סרגל גלישה הקישו בחלון הגרפי על Insert>Slider Bar.

הדגימו כיצד משתנה ההיטל של חתך החרוט על מישור xy כאשר a משתנה ומצאו את משוואות ההיטלים בדוגמאות שתבחרו.

ב. נתונה משפחת מישורים על-ידי המשוואה הפרמטרית: $x - y + az - 1 = 0$.

חקרו בעזרת סרגל גלישה כיצד משתנה צורת חתך החרוט עם המישורים, כאשר a משתנה.

הדגימו כיצד משתנה ההיטל של חתך החרוט על מישור xy כאשר a משתנה ומצאו את משוואות ההיטלים בדוגמאות שתבחרו.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name10.2.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 10.3

ראו גם קובץ: solution10.3.dfw

א. רשמנו את משוואת החרוט הסטנדרטי $z^2 = x^2 + y^2$ ושרטטנו את המשטח בחלון הגרפי התלת מימדי. על מנת לשרטט את משטח המישור המתאים לערכים שונים של משוואת המישור עם פרמטר: x + az - 1 =0 עלינו להפעיל סרגל גלישה.

שימו לב יש לרשום את המשוואה בצורה מפורשת: $z = \frac{1-x}{a}$

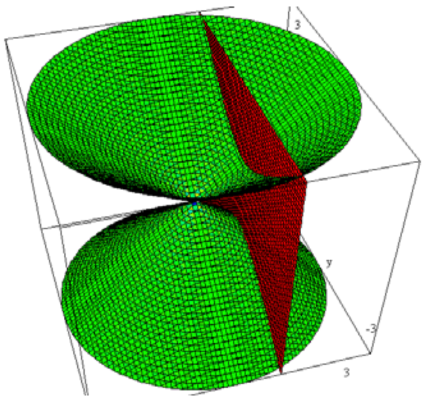
במהלך הגלישה נראה כי:

עבור 1 < |a| חתכי החרוט הם אליפסות

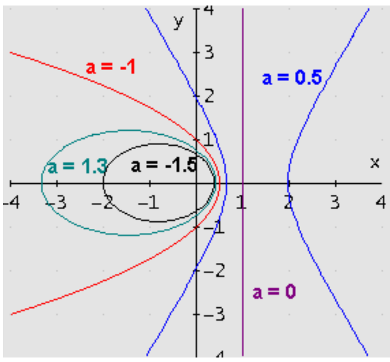
עבור 1 = |a| חתכי החרוט הם פרבולות (המישור מקביל לקו היוצר של החרוט)

עבור 1 > |a| חתכי החרוט הם היפרבולות

מה קורה עבור a = 0? מאחר והביטוי המפורש מכיל 0 במכנה – מופיעה הודעה "אין נקודות מתאימות". אם נציב 0 במקום a במשוואה הנתונה תתקבל משוואת מישור x = 1 שהחיתוך שלו עם החרוט הוא היפרבולה. ראו גם את האנימציה בקובץ 10.3a.dpg תוך כדי תנועה, משנים את a בעזרת ה-scrollbar ואז רואים את הצורות השונות.



ניתן לחקור את סוגי חתכי החרוט המתקבלים אם מתבוננים בערכי המקדמים במשוואה הכללית של ההיטל על מישור xy: $x^2(1-a)^2 - 2x - a^2y^2 + 1 = 0$. אפשר גם לבחור דוגמאות מייצגות ולשרטט אותן. (אם מציבים אפס במקום a במשוואה מתקבל משוואת ישר כפול $(x-1)^2 = 0$, שלא ניתן לראותו כאשר משרטטים משוואה זו בגלל מגבלת תוכנה.)



ב. גם בתרגיל זה נפעיל סרגל גלישה לשרטוט דוגמאות עבור מישור הנתון על ידי משוואה עם פרמטר. נרשום אותה בצורה מפורשת: $z=-\frac{x-y-2}{a}$. (הבעייתיות לגבי a = 0 קיימת גם כאן.)

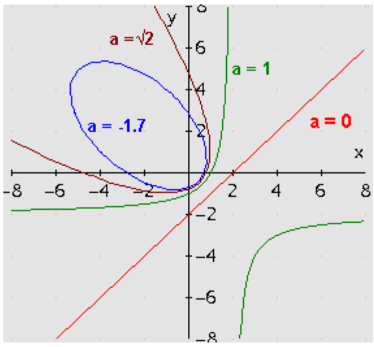
במהלך הגלישה נשער כי:

עבור $\sqrt{2}$ > |a| חתכי החרוט הם אליפסות

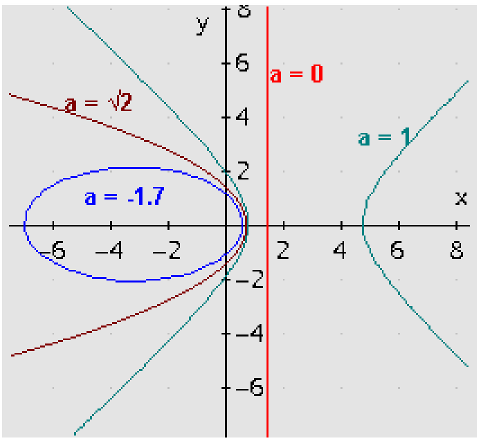
עבור $\sqrt{2}$ = |a| חתכי החרוט הם פרבולות (המישור מקביל לקו היוצר של החרוט)

עבור $\sqrt{2}$ < |a| חתכי החרוט הם היפרבולות

נאמת את השערתנו סוגי חתכי החרוט המתקבלים אם מוצאים את המשוואה הכללית של ההיטל על מישור xy: $x^2(1-a^2)-2x(y+2)+y^2(1-a^2)+4y+4=0$ ומשרטטים דוגמאות מייצגות:



סיבוב ב- 45^0 נותן משוואות כללית נוחה יותר של ההיטלים (חתכי החרוט): $x^2(2-a^2)+4\cdot\sqrt{2}x+a^2y^2+4=0$ ומשרטטים דוגמאות מייצגות:



פעילות 10.4 – חתכי חרוט מנוונים

א. חקרו את החיתוך של החרוט הסטנדרטי עם המישור המוגדר ע"י המשוואה $x + y = 0$.

ב. חקרו את החיתוך של החרוט הסטנדרטי עם המישור שמשוואתו היא $x + z = 0$.

ג. מהו החיתוך של החרוט הסטנדרטי עם המישור שמשוואתו היא $z = 0$ (הוא מישור xy).

ד. נתונה משוואת מישור עם פרמטר $z – ax = 0$.
חקרו בעזרת סרגל גלישה כיצד משתנה צורת חתך החרוט עם המישורים כאשר a משתנה.

ה. מצאו משוואת מישור כך שהמשוואה $2x^2 + 3xy – 2y^2 = 0$ מתארת את ההיטל של החיתוך של המישור עם החרוט הסטנדרטי.

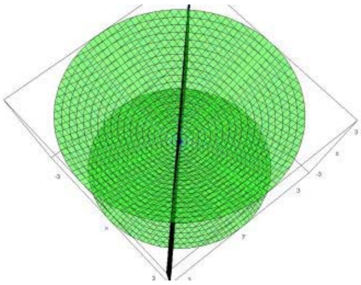
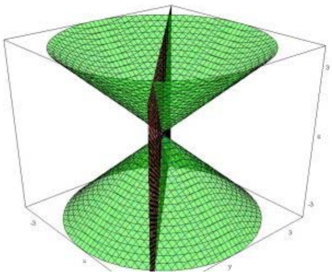
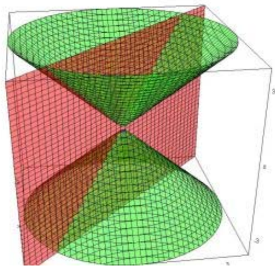
שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name10.4.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 10.4

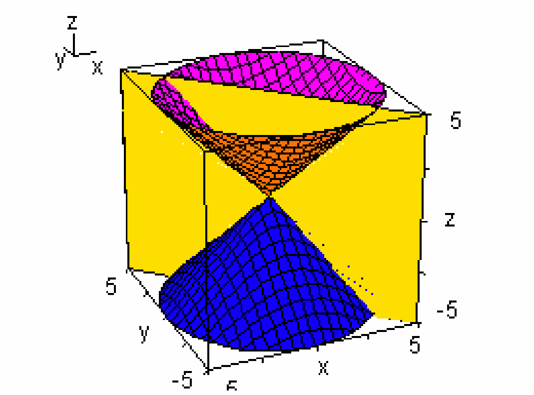
ראו גם קובץ: solution10.4.dfw

א. נחקור את החיתוך של החרוט הסטנדרטי עם המישור $x + y = 0$.

כאן נגלה כי חתך החרוט הוא האיחוד של שני קוים ישרים. להלן שלושה שרטוטים מתאימים למצב כזה.

שרטוט בעזרת Derive:



נמצא הצגה פרמטרית:

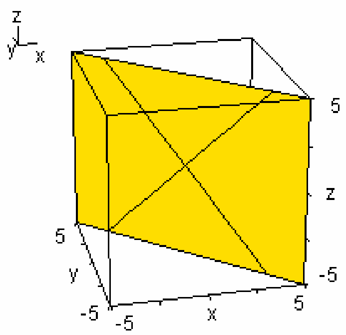
$$x^2 + y^2 = z^2 \wedge x + y = 0$$

$$\text{SOLVE}(x^2 + y^2 = z^2 \wedge x + y = 0, [z, y])$$

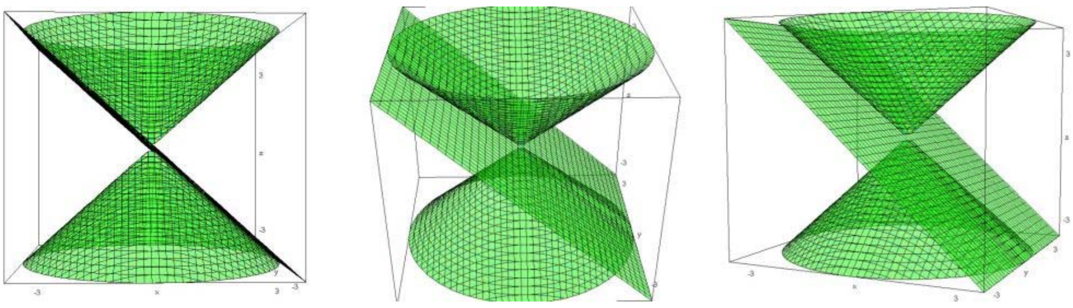
$$(z = -\sqrt{2}\cdot x \wedge y = -x) \vee (z = \sqrt{2}\cdot x \wedge y = -x)$$

$$[x, -x, -\sqrt{2}\cdot x] \vee [x, -x, \sqrt{2}\cdot x]$$

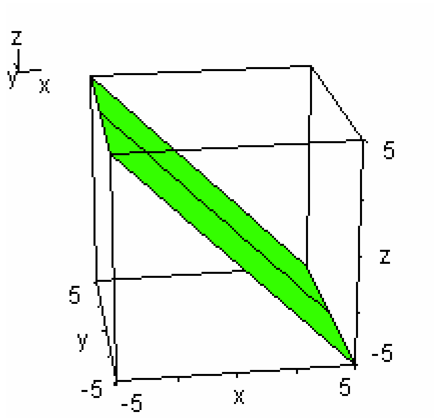
בשרטוט רואים כי חתך החרוט הוא איחוד של שני קווים ישרים:



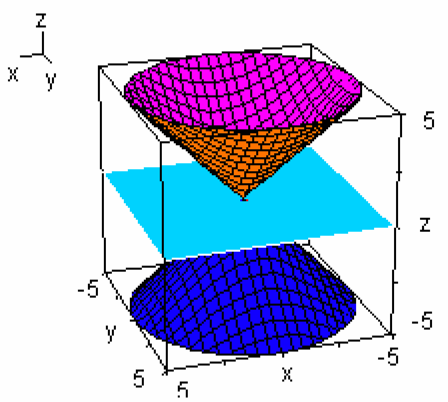
ב. נחקור את החיתוך של החרוט הסטנדרטי עם המישור שמשוואתו היא $x + z = 0$. כאן, המישור משיק לחרוט, אבל לא בנקודה אחת, אלא לאורך ישר שלם. הישר הזה הוא *ישר יוצר* של החרוט.



ההצגה הפרמטרית היא: [x, 0, -x] והשרטוט:



ג. החיתוך של החרוט הסטנדרטי עם המישור שמשוואתו היא z = 0 מנוון עוד יותר: הוא מכיל רק נקודה אחת.



ד. נפעיל סרגל גלישה ונראה כי: עבור1 > |a| חתך החרוט מכיל רק נקודה אחת, כאשר a = 1 חתך החרוט הוא ישר יוצר של החרוט, ו עבור1 < |a| חתך החרוט הוא איחוד של שני ישרים.

ה. ה"עקומה" המתקבלת משרטוט קבוצת האמת של המשוואה ממעלה שנייה $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0$ נראית כאיחוד של שני ישרים, ואמנם פירוק לגורמים מאשר זאת $(x + 2y)(2x - y) = 0$. ה"עקומה" עוברת דרך ראשית הצירים.

נמצא משוואה של היטל של חתך חרוט שנוצר על-ידי מישור כללי העובר דרך הראשית:

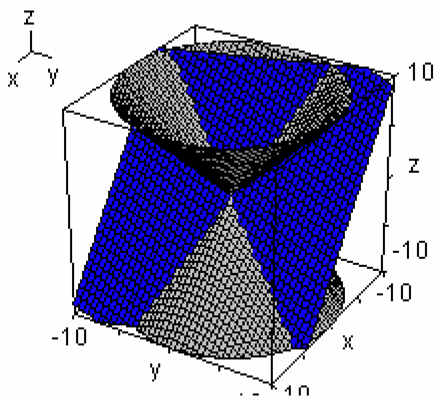
$$x^2 \cdot (a^2 - c^2) + 2 \cdot a \cdot b \cdot x \cdot y + y^2 \cdot (b^2 - c^2) = 0$$

נשווה מקדמים ונקבל מערכת משוואות שפתרונה ייתן את המקדמים a, b, c.

$$\left[a^2 - c^2 = 2,\ 2 \cdot a \cdot b = 3,\ b^2 - c^2 = -2\right]$$

נבחר באחד הפתרונות של המערכת, נשרטט את המישור ונראה חתך חרוט מנוון – איחוד של שני ישרים:

$$\frac{3 \cdot \sqrt{2} \cdot x}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot y}{2} + \frac{\sqrt{10} \cdot z}{2} = 0$$



ההיטל של איחוד הישרים על מישור xy הוא: [x, 2x, 0] ∨ [x, -x/2, 0]. הקשר עם המשוואה הנתונה (בצורתה המפורקת) ברור.

נספח: חיתוך של חרוט עם מישור משתנה – בעזרת DPGraph.

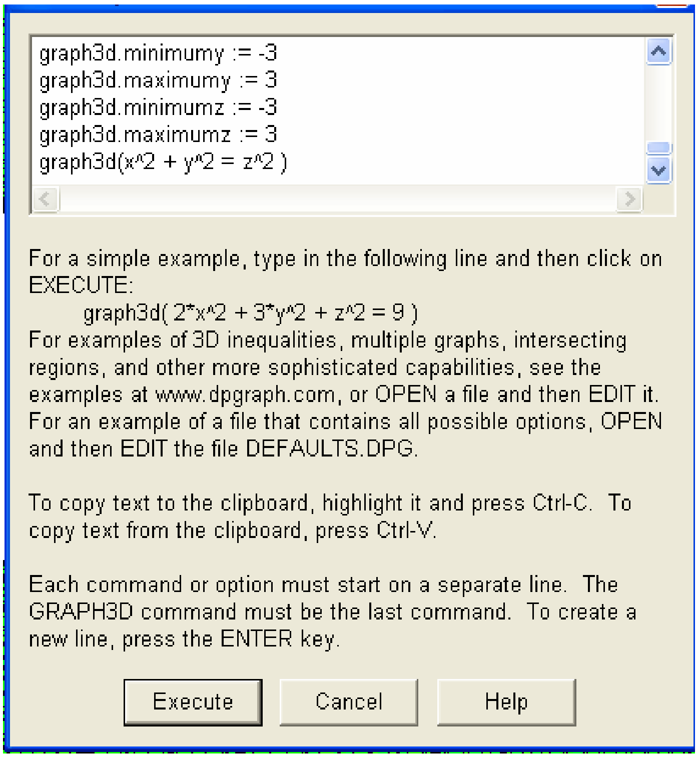
לתוכנה אחרת PDGraph, יש יכולת לשרטט משטחים שקופים בדרגות שונות של שקיפות. לכן נוכל להשתמש בה כדי לראות חתכי חרוט. כדי לפתוח את הקבצים שיצרנו בעזרת תוכנה זו, ניתן להוריד את ה- Viewer חינם מן האתר http://www.dpgraph.com. כך תוכלו לראות את השרטוטים ולהפעיל את האנימציות. ראו:

cone-circle.dpg, cone-ellipse.dpg, cone-hyperbola.dpg, cone-parabola.dpg, cone-lines.dpg

כדי לבנות קבצי DPGraph יש להתקין את התוכנה עצמה, לא רק את ה- Viewer, במחשב.

(ראו http://www.dpgraph.com). להלן הנחיות לעבודה עם תוכנה זו.

1. בשולחן העבודה לחצו על הכפתור . במסך הפתיחה של PDGraph מופיע סרגל תפריט למעלה. לחצו על Edit. נפתח חלון .



השורה התחתונה בחלון עם רקע לבן מיועדת למשוואה (או למשוואות) של המשטח (או המשטחים) שאנו מבקשים לשרטט. בעזרת העכבר אפשר להיכנס לשורה הזאת ולשנות את הכתוב. רשמו את משוואת החרוט הסטנדרטי. תעשו את זה ולחצו על הכפתור Execute בתחתית חלון התפריט.

כעת ברצוננו לשרטט את המישור הנתון על-ידי הנ"ל: לצורך זה, נחזור ל- Edit ונוסיף את משוואת המישור $x + y - z + 1 = 0$ בשורה התחתונה של החלון בעל הרקע הלבן (שימו לב לסוגריים, במידה ואתם רוצים לשרטט יותר ממשטח אחד יש לשים סוגריים כפולים):

graph3d((x^2+y^2=z^2, x+y-z+1=0))

מה רואים? Example1.dpg

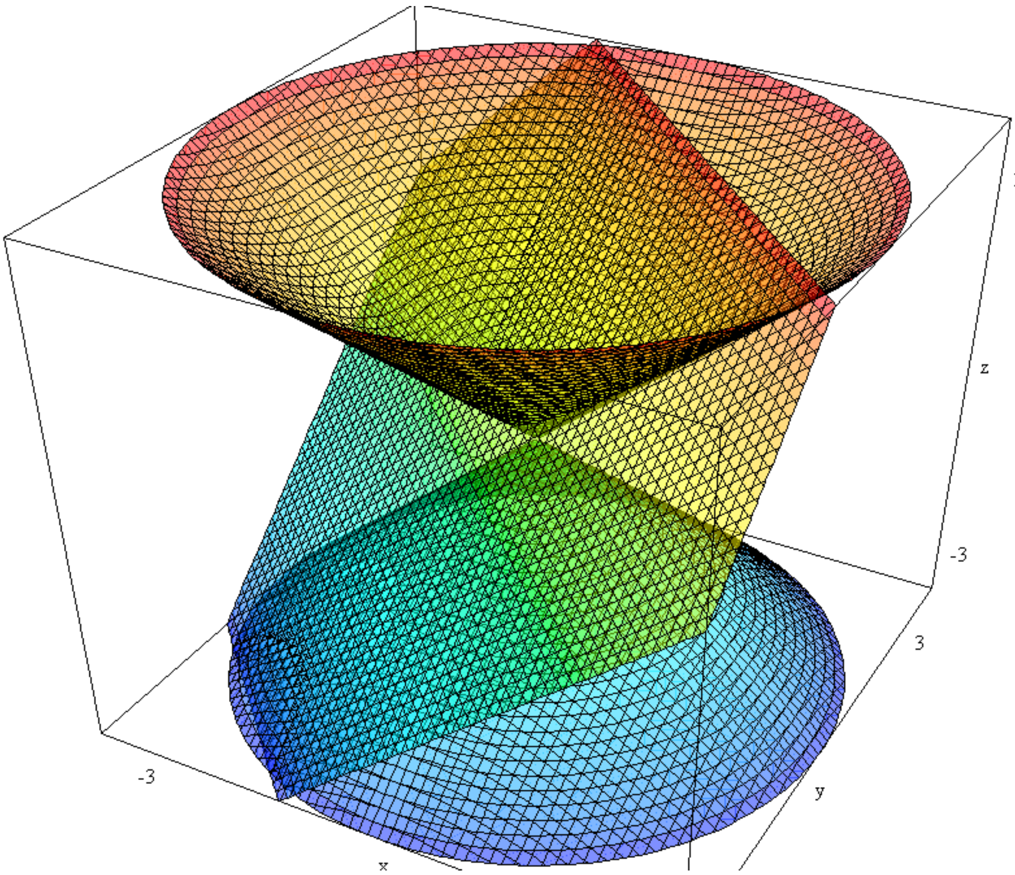
נחזור לחלון התפריט Edit: בחלון הלבן נעלה בעזר הכפתור הנע בצד ימין עד השורה

graph3d.transparency := 0

ערך הפרמטר graph3d.transparency קובע את מידת השקיפות של השרטוט. הערכים נעים בין 0 (אין שקיפות) ל- 1 (שקיפות מלאה). נחליף את הערך 0 (שמשמעותו אין שקיפות) בערך 0.5.

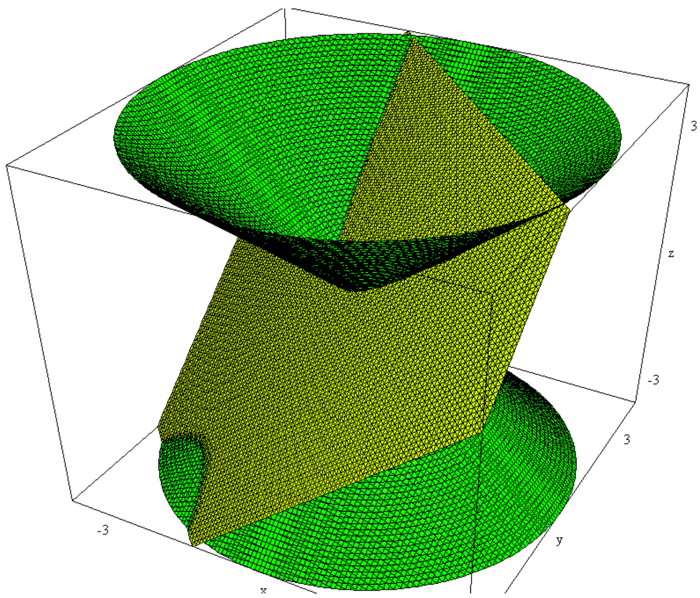
מה אתם רואים? נסו ערכים שונים עבור פרמטר השקיפות.

להלן השרטוט כאשר פרמטר השקיפות שווה ל- 0.5 Example2.dpg



אולי ריבוי הצבעים מפריע לכם. תכנסו ל- Color בסרגל התפריט הראשי ותנסו מספר אפשרויות: צבע לפי גובה, לפי שיפוע (steepness), צבע אחיד Example3.dpg.

2. אפשר לחדד את הרזולוציה באמצעות התפריט Edit: החליפו את ערך הפרמטר graph3d.resolution מ- 21 (ערכו הסטנדרטי כאשר מריצים את DPGraph בתחילת העבודה) לערך גבוה יותר. נסו מספר אפשרויות. באחת מן הקומבינציות של ערכי הפרמטרים, תתחילו לראות טוב יותר את החיתוך של החרוט עם המישור: לדוגמה, קבעו graph3d.resolution=100. באותה הזדמנות, ודאו ש- graph3d.transparency=0. עקומת החיתוך נראית בבירור Example4.dpg.



כדי לסיים את הפעילות הזאת בצורה דינמית, לחצו על Animate בסרגל התפריט הראשי. מציעים שתי אפשרויות: סיבוב רציף (continusously rotate) ועצירה. נסו זאת.

4. בפעילות 10.3 ראיתם דוגמאות בהן המישור תלוי בפרמטר a. נשנה אותו בעזרת סרגל הגלישה של DPGraph הנקרא Scrollbar. מצאו אותו התפריט? אחרי לחיצה בשם Scrollbar נפתח תפריט ספציפי: בחרו את a והתחילו לגרור את הכפתור. בנו דוגמאות משלכם (או הפעילו את הדוגמאות 10.3a.dpg 10.3b.dpg). מה רואים?