



1. נקודות וישרים – פעילות להכרת הסביבה הממוחשבת

מבוא

מטרתה של יחידת לימוד זו כפולה: ראשית, הכרת החלון האלגברי והחלון הגרפי של התוכנה המלווה את הפעילויות, *Derive*. התלמידים ילמדו לשרטט נקודות, קטעים וגרפים ולהוסיף כתוביות לשרטוטים, וכן לבצע בעזרת התוכנה את הפעולות: פישוט, הצבה ופתרון משוואה. שנית, הכנה לתחילת לימוד נושא הגיאומטריה האנליטית. תלמידי 5 יח"ל נפגשים עם נושא זה לראשונה במסגרת יחידה 7, וייתכן כי כל הידע שצברו עד כה מסתכם בלימודי הפונקציה הקווית בחטיבת הביניים. בפעילויות הבאות ייפגשו התלמידים מחדש עם שיפוע של ישר לפי שתי נקודות שעליו, ויגלו את תכונת הניצבות של ישרים תוך הפעלת משפט פיתגורס. כמו כן יחשבו בעזרת התוכנה מרחק בין שתי נקודות ושטח משולש לפי קדקודיו. כך יחזקו את הנושאים הבסיסיים הנחוצים להמשך הלימוד. במהלך הפעילות ביחידה זו ייחשפו התלמידים גם לאפשרויות התכנות של התוכנה, שאליהן ישובו גם ביחידות הבאות. הם יגדירו למחשב פונקציות לביצוע ויפעילו אותן. נציין כי התכנות בסביבה הממוחשבת נשען על הידע המתמטי, ולצורך תכנות נוסחה דרושה הבנה עמוקה של המתמטיקה המובילה אליה. המשתמש 'משוחח' עם התוכנה בשפת המתמטיקה. עוד ביחידה זו: הוכחת תכונות גיאומטריות בשיטות של גיאומטריה אנליטית. הפעילות מובילה את התלמיד מן המקרה הפרטי אל הכללי, ומלווה אותו בהוכחת משפט ישר והפוך בדרך אנליטית. כאן רב כוחו של הכלי הטכנולוגי. במקרה הפרטי – לבדיקת ההוכחה על ידי שרטוט תואם, ובמקרה הכללי – לפישוט ביטויים ארוכים ומרובי משתנים.

אחרי ההסברים ליחידה זו מוגשות הנחיות טכניות לארגון העבודה עם מסמכי Word ועם מסמכי *Derive*.

רשימת הפעילויות:

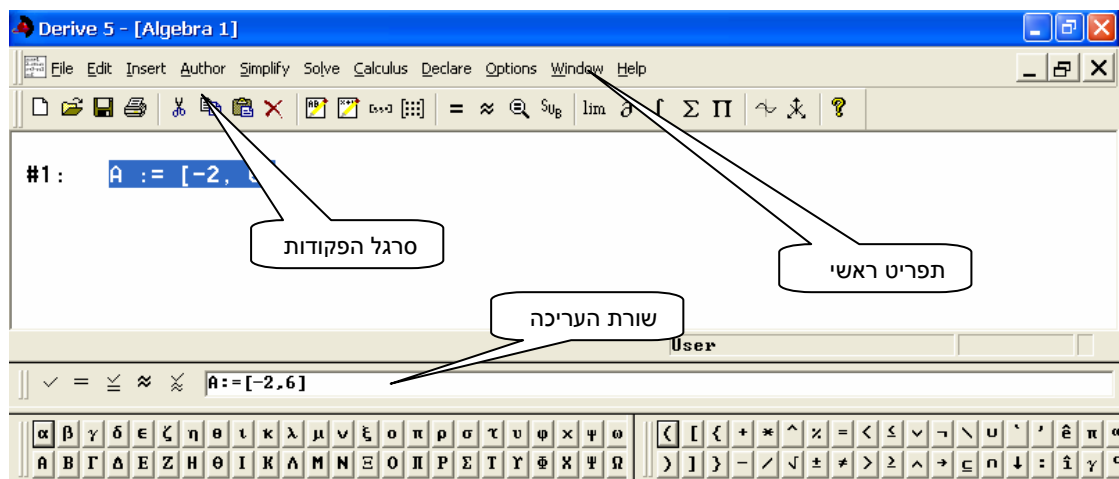
- פעילות 1.1 – משולש ישר זווית
- פעילות 1.2 – ישרים ניצבים
- פעילות 1.3 – מכפלת השיפועים של ישרים ניצבים
- פעילות 1.4 – הוכחת ההשערה
- פעילות 1.5 – איפה הקדקוד?
- פעילות 1.6 – שטח של משולש

הסביבה הממוחשבת נקראת Derive והיא תעזור לנו ללמוד הנדסה אנליטית.

בטבלה שלפניכם נפרט את סימון המושגים בתוכנה Derive.

מושגים	סימונים ב Derive	הערות
נקודה במישור	$A := [a1, a2]$	
קטע	$[A, B]$	לשרטוט קטעים ומצולעים ראו עמ' 4
אורך קטע	$ B - A $	סימן הערך המוחלט משמש לחישוב מרחק בין נקודות. ראו עמ' 5
שיפוע	פונקציה המוגדרת על ידי המשתמש: $SLOPE(P, Q)$	ראו הסבר והגדרה בעמ' 6

עם פתיחת התוכנה Derive מתקבל החלון האלגברי שלה:
שימו לב למקומו של הסמן: הסמן יכול להימצא במסך או בשורת העריכה.



פעילות 1.1 – משולש ישר זווית

א. קדקודי משולש ABC הם:

$$A := [-2, 6]$$

$$B := [4, -2]$$

$$C := [1, 7]$$

רשמו את הנקודות בחלון האלגברי.

רישום ביטוי על המסך:

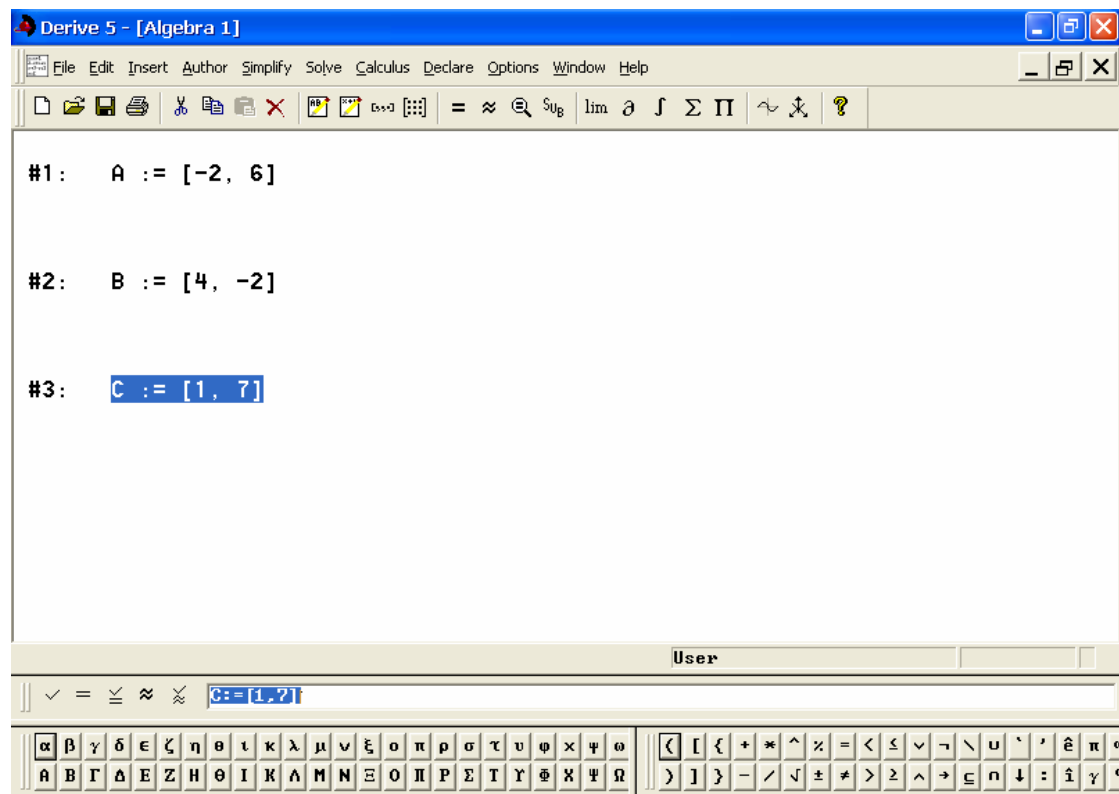
רישום ביטוי נעשה כאשר הסמן נמצא בשורת העריכה. (אם הסמן אינו בשורת העריכה, העבירו את העכבר לשורת העריכה והקליקו עליו.)

הקלידו $A := [-2, 6]$

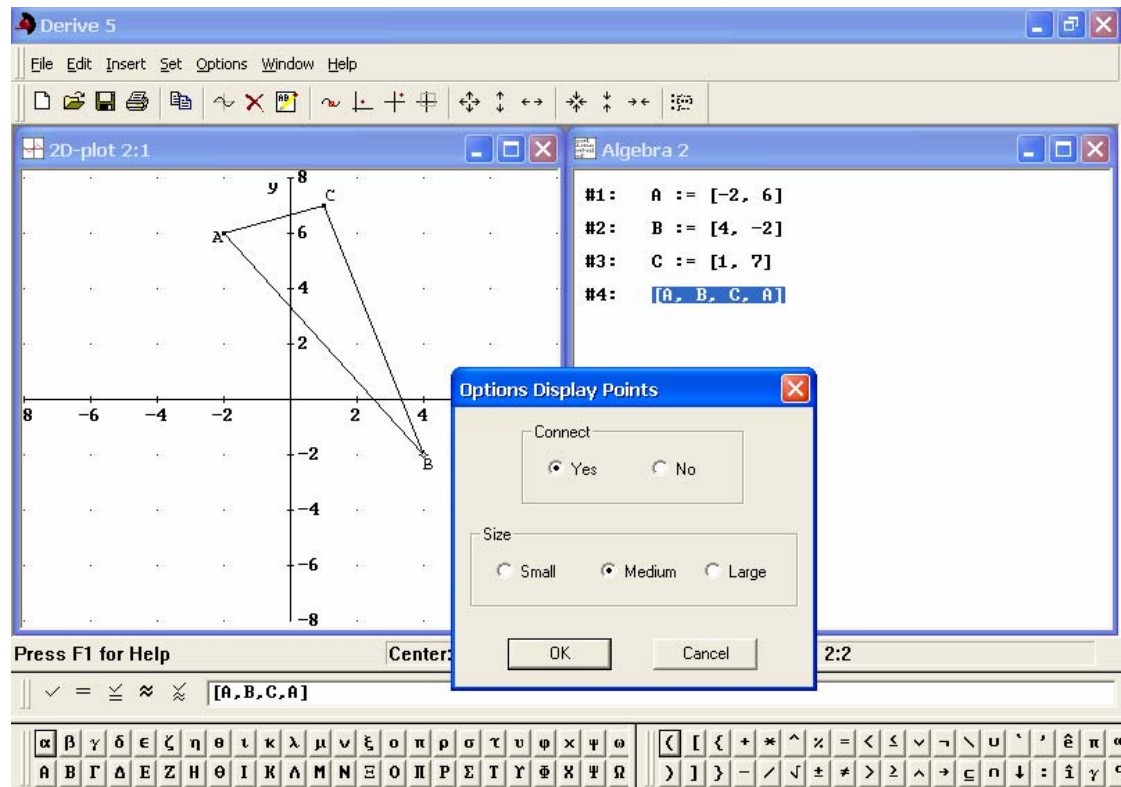
הקישו Enter כדי להעביר את הביטוי לחלון האלגברי.

מחיקת ביטויים בחלון האלגברי

למחיקת ביטויים בחלון האלגברי – סמנו את הביטויים והקליקו  (Delete)



ברצוננו לשרטט את המשולש.



פתיחת חלון גרפי (דו ממדי) וחלוקה אנכית של המסך:

הקישו על  לפתיחת חלון גרפי.
מתפריט Window בחרו Tile Vertically – החלון הגרפי יופיע לצד החלון האלגברי.

מעבר בין החלונות (או שורת העריכה) נעשה על ידי הקשה עם העכבר.

שרטוט נקודות וקטעים:

שרטוט נקודה: סמנו בעזרת העכבר את הנקודה A בחלון האלגברי והקישו על  לעבור לחלון הגרפי
ושוב הקישו  (Plot) לשרטוט הנקודה.

שרטוט קבוצה של נקודות: כדי לשרטט קבוצת נקודות בפעולה אחת רשמו בשורת העריכה את כל הנקודות בתוך סוגריים מרובעים כאשר ביניהן פסיקים [A, B, C] הקישו Enter להעברת הכתוב למסך ושרטוט  

שרטוט קטעים בין נקודות: לשרטוט צלעות המשולש – יש לשרטט את הנקודות מחוברות, כלומר יש לעבור למצב Connect.

מעבר למצב Connect:

בחרו בתפריט החלון הגרפי ב Options.
בתפריט שנפתח בחרו ב Display ובו בחרו Points. בחלון שנפתח אשרו Yes לגבי האפשרות Connect.
תוכלו לשנות את גודל הנקודות לפי האפשרויות: Small, Medium, Large. בחרו Small.

ענה רשמו [A, B, C, A] (כדי שהמשולש יישר) ושרטוט 

הצעת ייעול: סמנו את השורה בה רשום [A, B, C] והקישו F3 להעתקת הביטוי לשורת העריכה. הוסיפו את הדרוש והקישו Enter.

התאמת מערכת הצירים:

כדי לראות את המשולש כולו, השתמשו ב-  להתאמת גודל היחידות על מערכת הצירים בחלון הגרפי.

סימון נקודות בשרטוט ע"י אותיות:

הקליקו עם העכבר בנקודה בה ברצונכם להוסיף כתובית



להוספת כתובית השתמשו ב- **Insert Annotation**. בתיבת השיחה תבחרו את סוג האותיות **Font**, והצבע הרצוי. אחרי כתיבת האות בחלון הגרפי, ניתן להזיזה ולשנות את מיקומה.

לשינוי כתוביות או מחיקה – סמנו את הכתובית עם העכבר והיכנסו לתפריט **Edit**.



מחיקת שרטוטים על-ידי

העברת שרטוט מהחלון הגרפי לחלון האלגברי:

מתפריט **File** (בחלון הגרפי) בחרו **Embed**. תוכן החלון הגרפי יעבור לחלון האלגברי. בהקלקה על התמונה בחלון האלגברי יפתח החלון הגרפי עם התמונה. (אפשר לעדכן את התמונה בעזרת הפקודה **Update**)

סגרו את החלון הגרפי. הגדילו את החלון האלגברי.

לפני שתעברו לסעיף ב' רשמו קו הפרדה: הקליקו בתוך גרשיים "====1.1b===="

ב. לחישוב אורך הקטע AB נשתמש ב"ערך מוחלט".

הקלידו $|B - A| =$ או $\text{abs}(B - A) =$ (Enter)

להקלדת סימן של ערך מוחלט הקישו: **Shift + !**
על המסך יירשם: $|B - A| = 10$

הראו כי המשולש ABC הוא ישר זווית (תוכלו להיעזר במשפט פיתגורס).

סימן החזקה נמצא מעל הספרה 6 בלוח המקשים, וגם בסרגל הסימנים המתמטיים של התוכנה (מעל סימן השורש).

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name1.1.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 1.1

ראו גם קובץ: [solution1.1.dfw](#)

א. שימו לב לאופן סימון הנקודות: $A : [-2, 6]$

כדי לשרטט את הקטע AB, יש להקליד: $[A, B]$ ולבחור את המצב "Connect".

לסגירת המשולש יש להקליד: $[A, B, C, A]$

ב. חישוב ערך מוחלט: $|A - B| = 10$

נבדוק אם מתקיים משפט פיתגורס: $|A - B|^2 + |B - C|^2 = 100$

פעילות 1.2 – ישרים ניצבים

א. משולש ABC הוא משולש ישר זווית, $\angle C = 90^\circ$

קצות הניצב AC הם: $C=[5,0]$ $A=[-3,4]$

כדי להשלים את המשולש, חפשו נקודה מתאימה לקודקוד החסר, B, לדוגמה: $B=[2, y]$
היעזרו במשפט פיתגורס ורשמו משוואה מתאימה כדי למצוא את ערכו של y.

פעולות בחלון האלגברי:

לפישוט ביטוי בחלון האלגברי הקישו  (Simplify).

לפתרון משוואה בחלון האלגברי הקישו  (Solve). אם במשוואה יותר מנעלם אחד ייפתח חלון, בחרו את הנעלם שברצונכם לבדוד והקישו על .

מצאו נקודה אחרת עבור הקודקוד B.

מה הקשר בין הנקודות שמצאתם עבור הקודקוד B?

לפני שתעברו לסעיף ב' רשמו קו הפרדה: הקליקו בתוך גרשיים "====1.2b===="

ב. סמנו את שיעורי הקודקוד B: $B=[x, y]$

הראו כי כל האפשרויות לסימון הקודקוד B נמצאות על ישר אחד.

כתבו את משוואת הישר והוסיפו אותו לשרטוט.

לפני שתעברו לסעיף ג' רשמו קו הפרדה: הקליקו בתוך גרשיים "====1.2c===="

ג. מהו שיפוע הישר שהניצב BC מונח עליו?

מהו שיפוע הניצב הנתון AC?

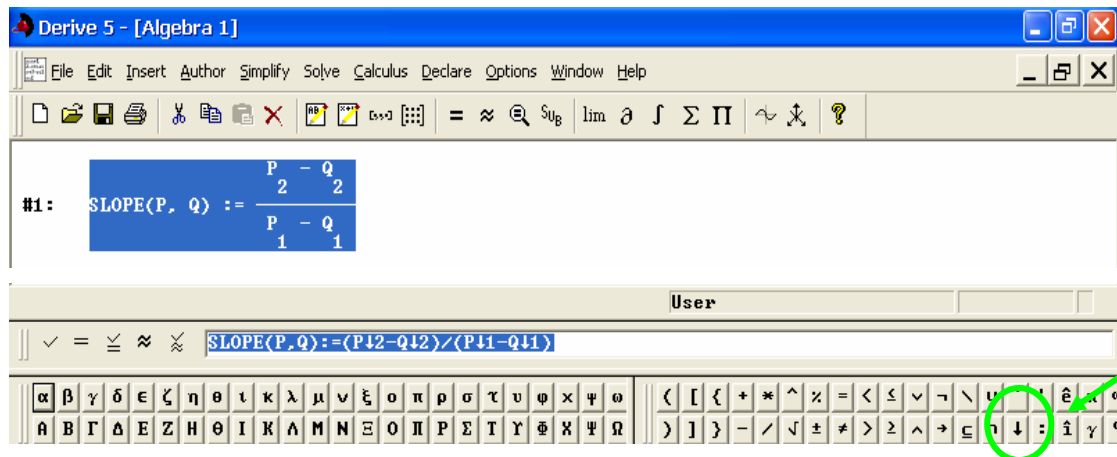
הגדרת פונקציית השיפוע:

לחישוב שיפוע של ישר (שאינו מקביל לציר y) לפי שתי הנקודות P ו-Q שעליו, נגדיר לתוכנה את פונקציית השיפוע (SLOPE) המחשבת את מנת ההפרשים: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

לסימון שיעור ה-X של נקודה P רשמו: $P \downarrow 1$ ולסימון שיעור ה-Y של הנקודה רשמו: $P \downarrow 2$

את מקש החץ $\downarrow$ תמצאו בסרגל הסימנים בתחתית המסך.

רשמו בשורת העריכה: $SLOPE(P,Q) = \frac{P \downarrow 2 - Q \downarrow 2}{P \downarrow 1 - Q \downarrow 1}$. הקישו Enter. עתה פונקציית השיפוע מוגדרת.



סכמו: מהו הקשר בין שיפועי הניצבים?

לפני שתעברו לסעיף ד' רשמו קו הפרדה: הקליקו בתוך גרשיים "===1.2d==="

ד. השערה: מכפלת השיפועים של ישרים ניצבים היא: ____.

חזרו על התהליך לגבי משולש ישר זווית אחר, כרצונכם.

בחרו את קצות הניצב AC כרצונכם (C קודקוד הזווית הישרה במשולש ABC),

מצאו את הישר שעליו מונח הניצב BC, בעזרת משפט פיתגורס.

חשבו את מכפלת השיפועים של שני הניצבים.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name1.2.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 1.2

[solution1.2.dfw](#) ראו גם קובץ:

מטרת הפעילות היא גילוי נוסחת הניצבות של ישרים בזיקה לידע הקיים של התלמידים: משפט פיתגורס כתנאי הכרחי ומספיק למשולש ישר זווית. במקביל, כמובן, מסייעת פעילות זו להעמקת ההיכרות עם האפשרויות הגלומות בתוכנה, באופן מדורג ובהיר.

א. סימון הנקודות:

#1: `====1.2a====`

#2: `[A := [-3, 4], C := [5, 0], B := [2, y]]`

כתיבת שוויון לפי משפט פיתגורס במשולש ישר זווית, ופתרוננו לפי y נותן את השיעור החסר של הקדקוד B :

#3: $|A - C|^2 + |B - C|^2 = |A - B|^2$

#4: $y^2 + 89 = y^2 - 8 \cdot y + 41$

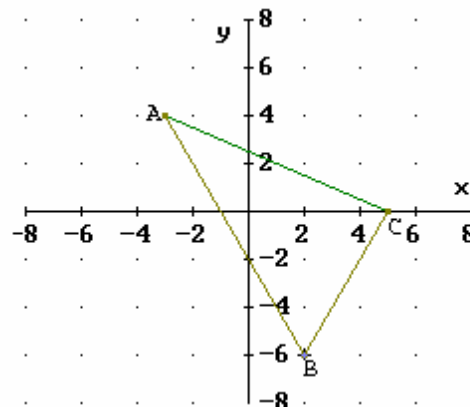
#5: `SOLVE( $y^2 + 89 = y^2 - 8 \cdot y + 41$ ,  $y$ )`

#6: `$y = -6$`

#7: `B := [2, -6]`

עתה אפשר לשרטט את המשולש המבוקש:

#8: `[A, B, C, A]`



נחזור על הפעולה עבור שיעור x אחר לקדקוד B, ונשרטט את המשולש ישר הזווית שהתקבל, עבור אותו ניצב AC.

ב. הכללת הפעילות הקודמת: המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המתאימות לקדקוד החסר B הוא קו ישר.

נגדיר נקודה כללית, נציב שוויון לפי משפט פיתגורס, נפשט אותו, ונציג את y כנושא הנוסחה (נפתור לפי y):

#10: $B := [x, y]$

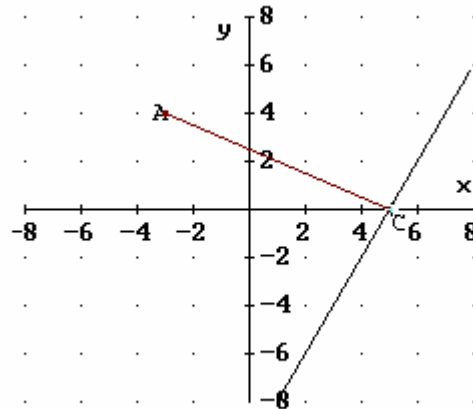
#11: $|A - C|^2 + |B - C|^2 = |A - B|^2$

#12: $x^2 - 10 \cdot x + y^2 + 105 = x^2 + 6 \cdot x + y^2 - 8 \cdot y + 25$

#13: $\text{SOLVE}(x^2 - 10 \cdot x + y^2 + 105 = x^2 + 6 \cdot x + y^2 - 8 \cdot y + 25, y)$

#14: $y = 2 \cdot (x - 5)$

הנה השרטוט המתאים:



ג. תכנות פונקצית שיפוע לפי ההוראות, וחישוב שיפועי הניצבים:

$$\text{SLOPE}(P, Q) := \frac{P_2 - Q_2}{P_1 - Q_1}$$

$\text{SLOPE}(B, C) = 2$

$$\text{SLOPE}(A, C) = -\frac{1}{2}$$

מצאנו קשר בין שיפועי הניצבים: מכפלת השיפועים היא -1.

ד. בחירה חופשית של הקדקודים וחזרה על אותו תהליך.

פעילות 1.3 – מכפלת השיפועים של ישרים ניצבים

AB הוא היתר במשולש ישר זווית ABC.

שיעורי הנקודות A ו-B נתונים על-ידי: $A = [-2, 0]$, $B = [2, -3]$

הניצב BC מונח על הישר: $y = -2x + 1$.

א. נסמן את קדקוד הזווית הישרה C: $C = [x, -2x + 1]$

חשבו את שיעורי הקדקוד C בעזרת משפט פיתגורס.

ב. בדקו את תשובתכם לפי מכפלת השיפועים של ישרים ניצבים.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name1.3.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 1.3

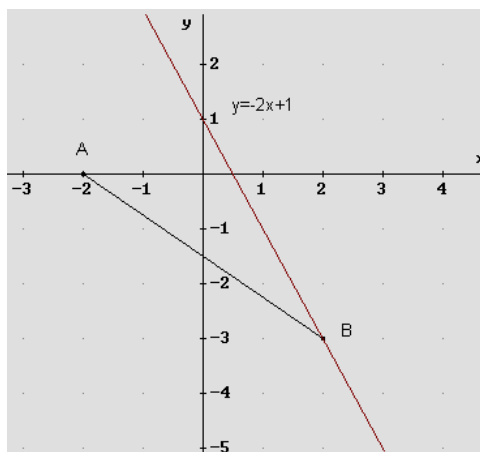
ראו גם קובץ: [solution1.3.dfw](#)

א. נסמן את הקדקודים, ונשרטט את הניצב AB ואת הישר שהניצב BC מונח עליו:

#2: $[A := [-2, 0], B := [2, -3], C := [x, -2 \cdot x + 1]]$

#3: $[A, B]$

#4: $y = -2 \cdot x + 1$



נכתוב שוויון לפי משפט פיתגורס, נפשט, ונפתור את המשוואה שהתקבלה:

#5: $|A - C|^2 + |B - C|^2 = |A - B|^2$

#6: $5 \cdot (2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 5) = 25$

#7: $\text{SOLVE}(5 \cdot (2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 5) = 25, x)$

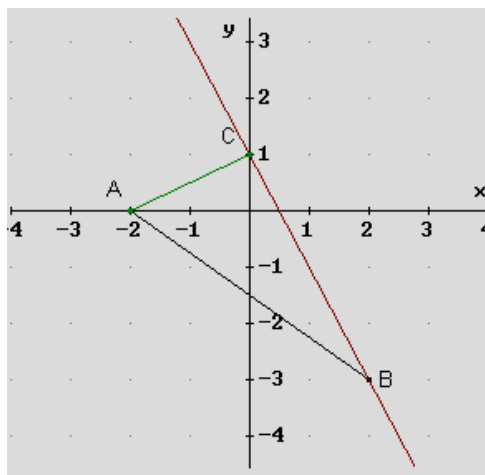
#8: $x = 2 \vee x = 0$

מה משמעות הפתרון השני?

מצאנו את שיעור ה- x של קודקוד הזווית הישרה, C . עתה נחשב את שיעור ה- y של קודקוד זה. (שיעורי קודקוד C , שנמצא על הישר הנתון ושמשוואתו היא $y = -2x + 1$, הוגדרו בשורה #2.)

#9: $C := [0, 1]$

אפשר לשרטט עכשיו את המשולש:



ב. נגדיר לתוכנה את פונקציית השיפוע ונחשב בעזרתה את מכפלת שיפועי הניצבים:

#12: $\text{SLOPE}(P, Q) := \frac{P_2 - Q_2}{P_1 - Q_1}$

#13: $\text{SLOPE}(A, C) \cdot \text{SLOPE}(B, C) = -1$

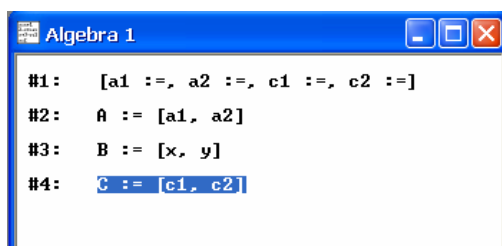
פעילות 1.4 – הוכחת ההשערה

א. נשתמש בשיטת הוכחה אנליטית להוכחת המקרה הכללי.

סמנו את הנקודות A , B במשולש ישר זווית ABC שניצביו אינם מקבילים לצירי המערכת. קדקוד הזווית הישרה הוא C .

סימון נקודה כללית:

לסימון שיעורי נקודה באופן כללי, לדוגמה: $A := [a_1, a_2]$, נגדיר תחילה את השיעורים: $a_1 :=$, $a_2 :=$; ורק אחר כך נוכל להשתמש בהם לסימון הקודקוד A .



מצאו את הקשר בין x ל- y לפי משפט פיתגורס, הביעו את y באמצעות x . השתמשו בקשר שמצאתם לחישוב שיפועי הניצבים AC ו- BC . היעזרו בפקודה  (SOLVE), סמנו שברצונכם לפתור עבור y .

הצבת משתנים:

להצבת ביטוי או מספר במקום אחד המשתנים הקישו  (Variable Substitution), בתיבה שתפתח האירו את המשתנה הנבחר וכתבו את הערך שתמצאו להציב במקומו.

מהי מכפלת השיפועים של שני הניצבים?

נסחו מסקנה:

הוכחנו כי בכל משולש ישר זווית (שניצביו אינם מקבילים לצירי המערכת) _____

נוכל להסתכל על נקודת המפגש של שני ישרים ניצבים כעל קדקוד זווית ישרה, ובכך הוכחנו משפט בהנדסה אנליטית: מכפלת השיפועים של ישרים ניצבים היא: -1.

ובניסוח אחר: אם _____ אז _____.

ב. נבדוק אם גם המשפט ההפוך נכון.

נסחו משפט הפוך: אם _____

אז _____.

הוכיחו את המשפט בשיטה של הנדסה אנליטית.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name1.4.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 1.4

ראו גם קובץ: [solution1.4.dfw](#)

א. ראשית עלינו להגדיר לתוכנה את המשתנים a_1, a_2 וכו',

ובעזרתם נוכל להגדיר את הקדקודים A, C :

#2: [a1 :=, a2 :=, c1 :=, c2 :=]

#3: [A := [a1, a2], C := [c1, c2], B := [x, y]]

נכתוב שוויון על פי משפט פיתגורס, נפשט אותו, ונביע את y כנושא הנוסחה (נפתור לפי y):

$$\#6: \text{SOLVE}(x^2 - 2 \cdot c1 \cdot x + y^2 - 2 \cdot c2 \cdot y + a1^2 - 2 \cdot a1 \cdot c1 + a2^2 - 2 \cdot a2 \cdot c2 + 2 \cdot c1^2 + 2 \cdot c2^2 = x^2 - 2 \cdot a1 \cdot x + y^2 - 2 \cdot a2 \cdot y + a1^2 + a2^2, y)$$

$$\#7: y = \frac{x \cdot (a1 - c1) - a1 \cdot c1 - a2 \cdot c2 + c1^2 + c2^2}{c2 - a2}$$

מצאנו משוואת ישר שהוא המקום הגיאומטרי של כל הקדקודים B של המשולש הכללי ABC, כאשר C הוא קדקוד הזווית הישרה.

נגדיר מחדש את פונקציית השיפוע (אם היא עדיין אינה מוגדרת בקובץ זה), ונבטא בעזרתה את שיפועי הניצבים:

$$\#8: \text{SLOPE}(P, Q) := \frac{P_2 - Q_2}{P_1 - Q_1}$$

$$\#9: \text{SLOPE}(A, C) = \frac{a2 - c2}{a1 - c1}$$

$$\#10: \text{SLOPE}(B, C) = \frac{y - c2}{x - c1}$$

נציב בביטוי האחרון במקום y את הביטוי שקיבלנו עבורו ממשפט פיתגורס (שורה #7), ונפשט:

$$\#11: \text{SLOPE}(B, C) = \frac{\frac{x \cdot (a1 - c1) - a1 \cdot c1 - a2 \cdot c2 + c1^2 + c2^2}{c2 - a2} - c2}{x - c1}$$

$$\#12: \text{SLOPE}(B, C) = \frac{a1 - c1}{c2 - a2}$$

עתה נבדוק מהי מכפלת שיפועי שני הניצבים, ובכך נשלים את ההוכחה בשיטת ההנדסה האנליטית עבור משולש ישר זווית כללי:

$$\#13: \frac{a2 - c2}{a1 - c1} \cdot \frac{a1 - c1}{c2 - a2} = -1$$

מסקנה: בכל משולש ישר זווית מכפלת שיפועי הניצבים היא -1.
ובניסוח אחר: אם הישרים ניצבים זה לזה, אז מכפלת שיפועיהם היא -1.

ב. משפט הפוך: אם מכפלת השיפועים של שני ישרים היא -1, אז הישרים מאונכים זה לזה.
הוכחת המשפט בשיטת ההנדסה האנליטית:
נגדיר את המשתנים היוצרים משולש, ונציב בתור נתון כי מכפלת שיפועי הצלעות AC ו BC היא -1. עלינו להוכיח כי צלעות אלו הן ניצבים במשולש ישר זווית.

$$\#15: [a1 :=, a2 :=, c1 :=, c2 :=]$$

$$\#16: [A := [a1, a2], B := [x, y], C := [c2, c2]]$$

$$\#17: \text{SLOPE}(B, C) \cdot \text{SLOPE}(A, C) = -1$$

נפשט את המשוואה האחרונה, ונביע את y כנושא הנוסחה:

$$\#18: \frac{(a2 - c2) \cdot (y - c2)}{(a1 - c2) \cdot (x - c2)} = -1$$

$$\text{SOLVE} \left(\frac{(a2 - c2) \cdot (y - c2)}{(a1 - c1) \cdot (x - c1)} = -1, y \right)$$

$$y = \frac{x \cdot (a1 - c1) - a1 \cdot c1 - a2 \cdot c2 + c1^2 + c2^2}{c2 - a2}$$

$$B := \left[x, \frac{x \cdot (a1 - c1) - a1 \cdot c1 - a2 \cdot c2 + c1^2 + c2^2}{c2 - a2} \right]$$

נבדוק שמתקיים משפט פיתגורס, בפישוט שני אגפי השוויון: $|A - C|^2 + |B - C|^2 = |A - B|^2$

מתקבלים ביטויים זהים. כלומר: המשולש ABC הוא ישר זווית.

בכך הוכחנו כי גם המשפט ההפוך נכון.

נוכל לסכם: ישרים מאונכים אם ורק אם מכפלת שיפועיהם היא -1.

(שימו לב למקרה החריג: ישרים המקבילים לצירים.)

פעילות 1.5 – איפה הקדקוד?

BD הוא אלכסון במלבן ABCD.

שיעורי הקדקודים B ו D נתונים על-ידי: $B := [4, -3]$ $D := [-4, 3]$

קדקוד הזווית הישרה C הוא: $C := [5, y]$

א. מצאו את שיעור ה y של הקודקוד C.

ב. מצאו את הקדקוד החסר, A.

הראו שהמרובע שקיבלתם הוא אכן מלבן.

ג. בחרו שיעור x אחר לקדקוד C, כרצונכם (האם קיימת מגבלה?), וחזרו על סעיפים א-ג.

שרטטו את המלבן שבחרתם.

כמה מלבנים שונים תוכלו לשרטט כך ש BD הוא האלכסון?

ד. מהי המגבלה על בחירת שיעור x של הקדקוד C?

אלו ערכים יכולים להתקבל עבור שיעור y של הקדקוד C?

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name1.5.dfw

פתרונות והסברים לפעילות 1.5

ראו גם קובץ: [solution1.5.dfw](#)

מטרת הפעילות היא שימוש במשפט שנוסח והוכח בפעילות הקודמת. בד בבד נחשפים התלמידים – עדיין באופן אינטואיטיבי – למושג **מקום גיאומטרי**, בבואם לשרטט את כל המלבנים בעלי אלכסון מסוים.

א. נגדיר את קדקודי המלבן:

#2: $[B := [4, -3], D := [-4, 3], C := [5, y]]$

נגדיר מחדש את פונקצית השיפוע:

#3:
$$\text{SLOPE}(P, Q) := \frac{P_2 - Q_2}{P_1 - Q_1}$$

זוויות המלבן ישרות, ולכן מכפלת שיפועי הצלעות הסמוכות, CB ו CD (אם אינן מקבילות לצירים) היא -1 :

#4: $\text{SLOPE}(C, D) \cdot \text{SLOPE}(C, B) = -1$

נפשט את המשוואה שקיבלנו ונפתור אותה:

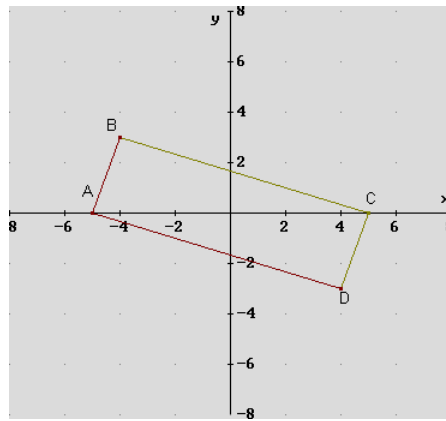
#5:
$$\frac{(y + 3) \cdot (y - 3)}{9} = -1$$

#6:
$$\text{SOLVE} \left(\frac{(y + 3) \cdot (y - 3)}{9} = -1, y \right)$$

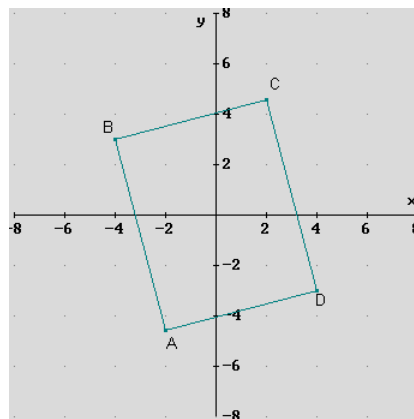
#7:
$$y = 0$$

קיבלנו את שיעורי הקודקוד C: [5, 0]

ב. מנימוקי סימטריה נוכל להראות כי שיעורי הקודקוד A הם: [-5, 0]
 נוכל להוכיח כי המרובע ABCD הוא אכן מלבן בדרכים שונות:
 למשל: מכפלת שיפועי כל זוג צלעות סמוכות היא -1. (מרובע שכל זוויתיו ישרות הוא מלבן).
 הנה המלבן:



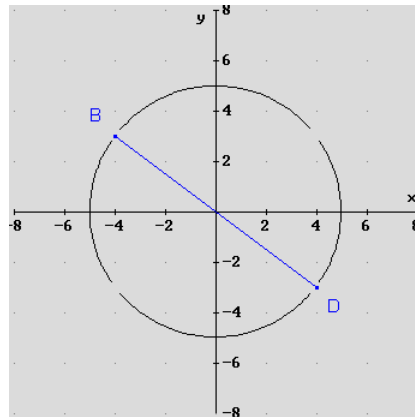
ג. נחזור על התהליך עבור שיעור x שונה לקודקוד C. למשל, C=[2, y].
 נוכל לבחור אינסוף קודקודים כאלו – אך יש מגבלות, נדון במגבלות בסעיף הבא.



ד. אם נבחר C=[6, y] לא יתקבל פתרון ממשי עבור y. לא יתקבל פתרון ממשי עבור y.

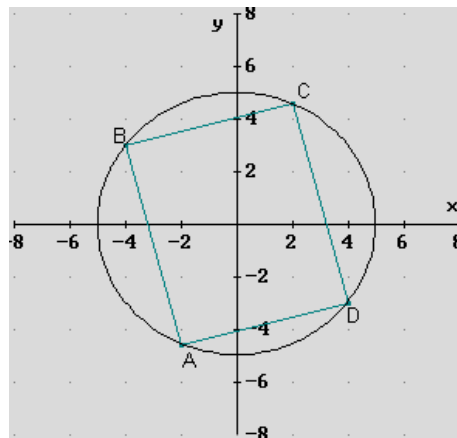
אנו מחפשים את המקום הגיאומטרי של הנקודות שמהן רואים את האלכסון הנתון בזווית ישרה, כלומר: את כל הקדקודים האפשריים של משולש ישר זווית שהקטע הנתון BD הוא היתר שלו. נציב: מכפלת השיפועים של הניצבים BC ו CD היא -1 .

$$\frac{y+3}{x-4} \cdot \frac{y-3}{x+4} = -1$$



ה"חורים" בשרטוט גרף המשוואה לעיל מזכירים למי ששכח את הנקודות המתקבלות כאשר הצלעות מקבילות לצירים (4,3) (-4, -3). שימו לב גם ל"חורים" סביב קצות הקטע.

על-ידי פישוט קיבלנו את משוואת המעגל שבו BD קוטר : $x^2 + y^2 = 25$



המקום הגיאומטרי מתאים למשפט הידוע אודות זווית היקפית הנשענת על קוטר. כל הנקודות על המעגל (מלבד קצות הקוטר) משמשות כקדקודי זוויות ההיקפיות הנשענות על הקוטר (אלכסון המלבן) BD .

כמובן שלא נוכל לבחור שיעור x הגדול מ 5, שכן אז הנקודה C תהיה מחוץ למעגל.

מאותו טעם יתקבלו ערכי y , כך ש $|y| \leq 5$

פעילות 1.6 – שטח של משולש

קדקודיו של המשולש ABC הם: $A: [-4, 6]$ $B: [8, 1]$ $C: [3, -2]$
 הראו כי שטח המשולש הוא 30.5 יח"ר.
 תחילה רשמו את שלבי הפתרון, ובחרו אלו מהם כדאי לבצע בעזרת התוכנה.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name1.6.dfw

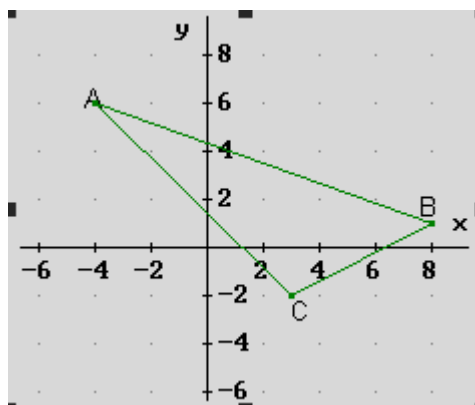
פתרונות והסברים לפעילות 1.6

ראו גם קובץ: [solution1.6.dfw](#)

מטרת הפעילות היא שימוש בידע הקיים עד כה בגיאומטריה אנליטית כהכנה לנושא **מרחק נקודה אל ישר**. בבואו לחשב את שטח המשולש, נדרש התלמיד לחשב את אורך הגובה מקדקוד המשולש אל הצלע שמולו. למעשה, עליו לחשב את מרחקו של הקדקוד מן הצלע. כאן יבצעו התלמידים את כל השלבים שאליהם יידרשו בהמשך, כשיחתרו לקראת הנוסחה לחישוב מרחק נקודה מישור. בפעילות זו מומלץ לתכנן מראש את שלבי הפתרון, ולשקול אלו מהם כדאי לבצע בעזרת התוכנה. נשרטט את המשולש:

#2: $[A := [-4, 6], B := [8, 1], C := [3, -2]]$

#3: $[A, B, C, A]$



שלבי הפתרון:

- מציאת משוואת הישר העובר דרך הנקודות A ו B (נחשב ידנית, ונבדוק על ידי שרטוט בעזרת התוכנה שהקטע AB מונח על הישר שמצאנו).
- מציאת משוואת הגובה היורד מהקדקוד C לצלע AB לפי שיעורי הנקודה C ושיפוע הגובה לפי תכונת מכפלת שיפועי האנכים.

- (3) חישוב שיעורי נקודה M - נקודת המפגש של הגובה עם הצלע שאליה הוא יורד. לפתרון מערכת שתי משוואות בשני נעלמים במספרים לא שלמים, ניעזר בתוכנה.
- (4) חישוב שטח המשולש בעזרת התוכנה המחשבת בקלות אורכי קטעים.

הפתרון:

(1) משוואת הצלע AB לפי שני קצותיה:

$$y = -\frac{5}{12} \cdot x + \frac{13}{3}$$

(2) שיפוע הגובה לצלע AB הוא – לפי מכפלת השיפועים – $5/12$
משוואת הגובה המבוקש לפי השיפוע והנקודה שממנה הוא מורד, C:

$$y = \frac{12}{5} \cdot x + n$$

(3) נסמן ב M את נקודת המפגש של הגובה היורד מקדקוד C עם הצלע AB, נחשב את שיעוריה:

לפתרון מערכת משוואות נשתמש בסימון "וגם":  , ונבחר בפקודה  (SOLVE) את המשתנים שאותם אנו מעוניינים למצוא.
בזכות התוכנה אין כל קושי לעבוד עם מספרים 'בלתי נוחים'.

$$\#18: \quad y = \frac{12 \cdot x}{5} - \frac{46}{5} \wedge y = -\frac{5}{12} \cdot x + \frac{13}{3}$$

$$\#19: \quad \text{SOLVE} \left(y = \frac{12 \cdot x}{5} - \frac{46}{5} \wedge y = -\frac{5}{12} \cdot x + \frac{13}{3}, [x, y] \right)$$

$$\#20: \quad x = \frac{812}{169} \wedge y = \frac{394}{169}$$

$$\#21: \quad M := \left[\frac{812}{169}, \frac{394}{169} \right]$$

(4) עתה נמצאים בידינו כל הנתונים הדרושים לחישוב שטח המשולש:

$$\#22: \quad \frac{|A - B| \cdot |M - C|}{2}$$

$$\#23: \quad \frac{61}{2}$$

ובכך הוכחנו את הנדרש.

מן המקרה הפרטי אפשר לעבור למקרה כללי.

נמצא נוסחה לחישוב שטח משולש לפי קדקודיו, אך ורק בעזרת הכלים שנרכשו עד כה. בלימוד הנושא וקטורים בוודאי ייחשפו התלמידים לנוסחה זו, ובהמשך – כשילמדו נוסחה לחישוב מרחק בין נקודה לישר – יוכלו לייצר את נוסחת שטח המשולש ביתר קלות. פעילות זו מהווה אם כן הכנה טובה לפרקים הבאים.

תחילה נגדיר את המשתנים של "משולש כללי"

#25: [a1 :=, a2 :=, b1 :=, b2 :=, c1 :=, c2 :=]

#26: [A := [a1, a2], B := [b1, b2], C := [c1, c2]]

נחזור על השלבים שביצענו בסעיף הקודם. למרות שמדובר בביטויים עתירי משתנים, לא נירתע כיוון שהתוכנה "תעבוד" אתם עבורנו.

משוואת הצלע AB:

$$\#27: \quad \text{SLOPE}(A, B) = \frac{a2 - b2}{a1 - b1}$$

$$\#28: \quad y = \frac{a2 - b2}{a1 - b1} \cdot x + n$$

$$\#29: \quad a2 = \frac{b1 \cdot (a2 - b2)}{a1 - b1} + a2 - b2 + n$$

$$\#30: \quad \text{SOLVE} \left(a2 = \frac{b1 \cdot (a2 - b2)}{a1 - b1} + a2 - b2 + n, n \right)$$

$$\#31: \quad n = \frac{a1 \cdot b2 - a2 \cdot b1}{a1 - b1}$$

$$\#32: \quad y = \frac{a2 - b2}{a1 - b1} \cdot x + \frac{a1 \cdot b2 - a2 \cdot b1}{a1 - b1}$$

משוואת הגובה CM:

$$\#33: \quad y = \frac{b1 - a1}{a2 - b2} \cdot x + n$$

$$\#34: \quad c2 = \frac{a1 \cdot c1 - a2 \cdot n - b1 \cdot c1 + b2 \cdot n}{b2 - a2}$$

$$\#35: \quad \text{SOLVE} \left(c2 = \frac{a1 \cdot c1 - a2 \cdot n - b1 \cdot c1 + b2 \cdot n}{b2 - a2}, n \right)$$

$$\#36: \quad n = \frac{a1 \cdot c1 + a2 \cdot c2 - b1 \cdot c1 - b2 \cdot c2}{a2 - b2}$$

$$\#37: \quad y = \frac{b1 - a1}{a2 - b2} \cdot x + \frac{a1 \cdot c1 + a2 \cdot c2 - b1 \cdot c1 - b2 \cdot c2}{a2 - b2}$$

נחשב את שיעורי הנקודה M, נקודת המפגש של הצלע עם הגובה המורד אליה:

$$\#38: y = \frac{b1 - a1}{a2 - b2} \cdot x + \frac{a1 \cdot c1 + a2 \cdot c2 - b1 \cdot c1 - b2 \cdot c2}{a2 - b2} \wedge y = \frac{a2 - b2}{a1 - b1} \cdot x + \frac{a1 \cdot b2 - a2 \cdot b1}{a1 - b1}$$

$$\#39: \text{SOLVE} \left(y = \frac{b1 - a1}{a2 - b2} \cdot x + \frac{a1 \cdot c1 + a2 \cdot c2 - b1 \cdot c1 - b2 \cdot c2}{a2 - b2} \wedge y = \frac{a2 - b2}{a1 - b1} \cdot x + \frac{a1 \cdot b2 - a2 \cdot b1}{a1 - b1}, [x, y] \right)$$

$$\#40: x =$$

$$\frac{a1^2 \cdot c1 - a1 \cdot (a2 \cdot (b2 - c2) + 2 \cdot b1 \cdot c1 - b2 \cdot (b2 - c2)) + b1 \cdot (a2^2 - a2 \cdot (b2 + c2) + b1 \cdot c1)}{a1^2 - 2 \cdot a1 \cdot b1 + a2^2 - 2 \cdot a2 \cdot b2 + b1^2 + b2^2} + \frac{b2 \cdot c2}{a1 - b1} \wedge y =$$

$$\frac{a1^2 \cdot b2 - a1 \cdot (a2 \cdot (b1 - c1) + b2 \cdot (b1 + c1)) + a2^2 \cdot c2 + a2 \cdot (b1^2 - b1 \cdot c1 - 2 \cdot b2 \cdot c2) + b2 \cdot (b1 \cdot c1 + b2 \cdot c2)}{a1^2 - 2 \cdot a1 \cdot b1 + a2^2 - 2 \cdot a2 \cdot b2 + b1^2 + b2^2}$$

שיעורי הנקודה M הם:

$$\#41: M :=$$

$$\left[\frac{a1^2 \cdot c1 - a1 \cdot (a2 \cdot (b2 - c2) + 2 \cdot b1 \cdot c1 - b2 \cdot (b2 - c2)) + b1 \cdot (a2^2 - a2 \cdot (b2 + c2) + b1 \cdot c1)}{a1^2 - 2 \cdot a1 \cdot b1 + a2^2 - 2 \cdot a2 \cdot b2 + b1^2 + b2^2} + \frac{b2 \cdot c2}{a1 - b1}, \right.$$

$$\left. \frac{a1^2 \cdot b2 - a1 \cdot (a2 \cdot (b1 - c1) + b2 \cdot (b1 + c1)) + a2^2 \cdot c2 + a2 \cdot (b1^2 - b1 \cdot c1 - 2 \cdot b2 \cdot c2) + b2 \cdot (b1 \cdot c1 + b2 \cdot c2)}{a1^2 - 2 \cdot a1 \cdot b1 + a2^2 - 2 \cdot a2 \cdot b2 + b1^2 + b2^2} \right]$$

עתה נביע את שטחו של המשולש לפי שלושת קדקודיו:

$$\#42: \frac{|A - B| \cdot |C - M|}{2} = \frac{|a1 \cdot (b2 - c2) + a2 \cdot (c1 - b1) + b1 \cdot c2 - b2 \cdot c1|}{2}$$

הדרכה לעבודה עם קבצי Derive ושילובם עם קבצי Word

מתוך קבצי הפתרונות ב-Derive של התלמידים ניתן ללמוד רבות אודות הבנתם ואודות דרך עבודתם. לכן, מומלץ לאסוף את התוצרים משיעורים המלווים בפעילויות מחשב, ולבחון אותם בעיון. אפשר לבקש מהתלמידים להדפיס את הקבצים שלהם, להוסיף עליהם הסברים בכתב ולהגישים למורה. תלמידים אחרים יעדיפו להוסיף את הערותיהם ואת הסבריהם ישירות לקובץ, בדומה למוצע בקבצי הפתרונות המלווים את הפעילויות.

איך מוסיפים כיתוב?

לחצו על  (Insert Text) והקלידו הסברים.

לכתיבה בחלון האלגברי בעברית, לחצו בצד ימין על Shift+Ctrl. תוכלו לבחור את סוג הגופן ואת גודלו. בחרו

Windows> View Toolbars > Formatting Toolbar

(בקבצי הפתרונות המלווים את הפעילויות השתמשו ב Arial 11).

איך מעבירים שרטוט מהחלון הגרפי לחלון האלגברי?

בחרו File > Embed

לחיצה כפולה על השרטוט המשובץ בחלון האלגברי תפתח אותו מחדש.

לעדכון השרטוט בחרו File > Update

איך מדפיסים את תוכן החלון?

להדפסת כל תוכן החלון (האלגברי או הגרפי) בחרו File > Print

איך משלבים במסמכי Word תוכן מתוך חלונות מקבצי Derive ?

להעתקת שרטוט מהחלון הגרפי של Derive למסמך Word, בחרו Edit ובחלון שנפתח בחרו:

Copy Plot Window

עתה תוכלו בעזרת הפקודה "הדבק" להעתיק את השרטוט למסמך Word או לכל מקום אחר, כתמונה.

אפשרות נוספת: בחרו (בסרגל הכלים של החלון האלגברי או הגרפי) Edit > Mark and Copy. מסגרו את

התוכן שברצונכם להעתיק, שלבו במסמך Word בעזרת הפקודה "הדבק". תוכלו לערוך את התוכן שהעתקתם כתמונה.