



9. עוד מקומות גיאומטריים

מבוא

מקומות גיאומטריים הוא אחד הנושאים היפים ביותר בתכנית הלימודים בגיאומטריה. ביחידה זו נחקר מקומות גיאומטריים פחות מוכרים. לשם כך נשלב כלים גרפיים ואלגבריים ונבנה בשלבים את ההוכחות בשיטות של גיאומטריה אנליטית. בפעילות הרביעית נציג משפט מפתיע מתחילת המאה ה-19 על תשע נקודות הקשורות למשולש ונמצאות על מעגל אחד, ובעקבות חקירה נוספת של משפט זה בכלים טכנולוגיים נגלה מקומות גיאומטריים חדשים. תוך כדי הוכחת המשפטים הדרושים לחקירה נרחיב את שיטות העבודה בגיאומטריה אנליטית.

רשימת הפעילויות:

- פעילות 9.1 – הפרש ריבועי המרחקים משתי נקודות הוא גודל קבוע
- פעילות 9.2 – סכום מרחקים קבוע מנקודה וישר
- פעילות 9.3 – אמצעי המיתרים היוצאים מנקודה על מעגל
- פעילות 9.4 – מעגל תשע הנקודות (משפט פויירבאך)
- פעילות 9.5 – שאלות נוספות על מעגל תשע הנקודות

פעילות 9.1 – הפרש ריבועי המרחקים אל שתי נקודות הוא גודל קבוע

- א. הגדירו שתי נקודות $A=[-4, 4]$ $B=[4, -2]$.
 מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות אשר הפרש ריבועי המרחקים שלהן אל A ו- B הוא 30.
- ב. סמנו ב- M את נקודת האמצע של הקטע AB .
 מצאו נקודה D המשותפת לישר AB ולמקום הגיאומטרי שמצאתם בסעיף א'.
 מהו המרחק של הנקודה D אל הנקודה M ?
- ג. מצאו את המקום הגיאומטרי של הנקודות אשר הפרש ריבועי המרחקים שלהן אל A ו- B (הנתונות) הוא c (מספר חיובי). מצאו נקודה H המשותפת לישר AB ולמקום הגיאומטרי.
 מהו המרחק של הנקודה H אל הנקודה M . מהו הקשר בין אורך הקטע MH ואורך הקטע AB ?
- ד. מהו הקשר בין אורך קטע $A1B1$ ואורך קטע $M1H1$ הנבנה כמו בסעיפים הקודמים?

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name9.1.dfw

פעילות 9.2 – סכום מרחקים קבוע מנקודה וישר

- א. נתונים נקודה $M=[3, 1]$ וישר $L: x + 5 = 0$. מצאו לפחות שש נקודות שסכום מרחקיהן אל הנקודה ואל הישר הנתונים הוא 10.
- ב. מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות שסכום מרחקיהן אל הנקודה והישר הנתונים הוא 10. רשמו משוואה מתאימה ושרטטו את העקומה המתארת אותה. מהי צורת העקומה?
- ג. מצאו משוואות מתאימות לשני חלקי העקומה.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name9.2.dfw

פעילות 9.3 – אמצעי המיתרים היוצאים מנקודה על המעגל

- א. שרטטו מעגל שמרכזו O בראשית הצירים והרדיוס שלו 3 יחידות. הגדירו נקודה קבועה על המעגל $A:=[-3, 0]$.
 הגדירו נקודה כלשהי על המעגל מעל ציר ה- x $A1:= [x, \underline{\hspace{2cm}}]$
 הגדירו נקודה כלשהי על המעגל מתחת ציר ה- x $A2:= [x, \underline{\hspace{2cm}}]$
 שרטטו מיתרים $AA1$ $AA2$ וסמנו את נקודות האמצע שלהן בצבע אחד לפי בחירתכם. מהו לדעתכם המקום הגיאומטרי הנוצר על-ידי אמצעי המיתרים היוצאים מהנקודה הנתונה A ?
 בדקו על-ידי שרטוט אמצעי המיתרים (היעזרו בהוראה Vector)
- ב. סמנו על-ידי $R:=[x, y]$ נקודת אמצע של מיתר המחבר את הנקודה A עם נקודה כלשהי על המעגל שתסומן על-ידי $T:=[p, q]$. מצאו את משוואת המקום הגיאומטרי של הנקודות R כאשר T רצה על כל המעגל.
- ג. בחרו נקודה B בתוך המעגל ונקודה כלשהי T על המעגל. סמנו ב- R את אמצע הקטע BT . מצאו את משוואת המקום הגיאומטרי של הנקודות R כאשר T רצה על כל המעגל.
- ד. בחרו נקודה C מחוץ למעגל הנתון ונקודה כלשהי T על המעגל. סמנו ב- R את אמצע הקטע BT . מצאו את משוואת המקום הגיאומטרי של הנקודות R כאשר T רצה על כל המעגל.
- ה. מהו הקשר בין המקומות הגיאומטריים שנוצרו בשאלות הקודמות והמעגל הנתון? הכלילו את הבעיה לנקודה כלשהי במישור.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name9.3.dfw

פעילות 9.4 – מעגל תשע הנקודות (מעגל פויירבאך)

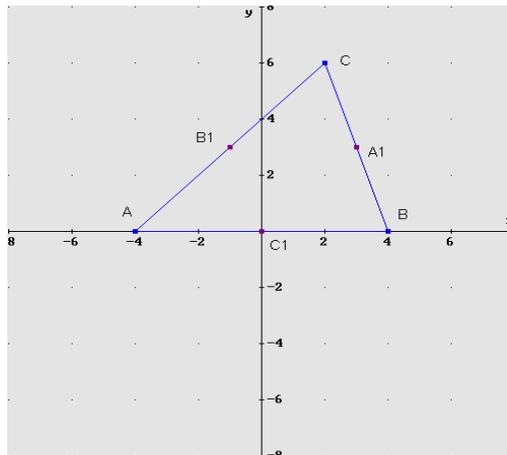
בראשית המאה ה-19 גילו מתמטיקאים שהתעניינו בגיאומטריה משפט מפתיע הטוען כי לכל משולש קשורות תשע נקודות הנמצאות על מעגל אחד. נקודות אלו הן: אמצעי הצלעות של המשולש, הנקודות בהם פוגשים הגבהים את הצלעות, ואמצעי הקטעים המחברים את נקודת החיתוך של הגבהים עם קדקודי המשולש.

המשפט המעניין נקרא על שם אחד החוקרים, קארל וילהלם פויירבאך (Feurbach).
אשרו את נכונות המשפט לגבי המשולש שקדקודיו $A: [-4, 0]$, $B: [4, 0]$, $C: [2, 6]$
הדרכה:

א. שרטטו את המשולש, חשבו את השיעורים של אמצעי הצלעות $A1, B1, C1$ וסמנו את אמצעי הצלעות בשרטוט.

וודאו שההוראה Simplify Before Plotting (בתפריט Options בחלון הגרפי) מסומנת:

$$\left[A1 := \frac{B + C}{2}, B1 := \frac{C + A}{2}, C1 := \frac{A + B}{2} \right]$$



- ב. מצאו את נקודות המפגש של הגבהים עם הצלעות: D (על AB), E (על BC), F (על AC). סמנו אותן בשרטוט.
- ג. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של הגבהים H, וחשבו את השיעורים של אמצעי הקטעים המחברים אותה עם קדקודי המשולש (J, L, K). סמנו את אמצעי הקטעים האלה בשרטוט.
- ד. הראו כי כל תשע הנקודות A1, B1, C1, D, E, F, J, K, L נמצאות על מעגל אחד. מצאו את משוואת המעגל.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name9.4.dfw

פעילות 9.5 – שאלות נוספות על מעגל תשע הנקודות

א. מהו המקום הגיאומטרי של המרכזים של מעגלי תשע הנקודות עבור משולשים המתקבלים אם מחליפים את הקדקוד C נגריל (באופן אקראי) שיעורים עבור קדקוד C וננסה להעלות השערה.

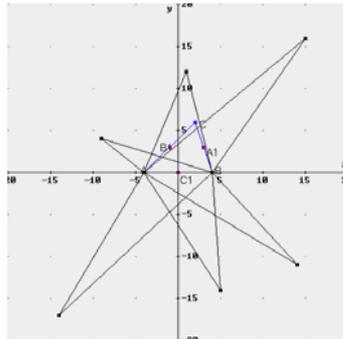
הדרכה: הגדירו את הקדקוד C: $[u, v]$ ואת המרכז של מעגל תשע הנקודות: $M := [p, q]$

כדי לשרטט מספר משולשים "באופן אקראי" נשתמש בפונקציה RANDOM של Derive:

רשמו $RANDOM(0) =$ להפעלת מנגנון ליצירת מספרים אקראיים על בסיס הזמן שעבר מהתחלת הרצת

התוכנה. להגרלת מספר אקראי בין -20 ל-20 הגדירו: $r := -20 + RANDOM(41)$

עתה הגרילו ושרטטו מספר משולשים בעזרת הביטוי: $[A, B, [r, r], A]$.



הראו כי שיעורי המרכזים של מעגל פויירבאך עבור משולשים המתקבלים מהחלפת הקדקוד

$$C \text{ לנקודה ששיעוריה } (u, v), v \neq 0 \text{ (מדוע?) מקיימים: } p = \frac{u}{2} \wedge q = -\frac{u^2 - v^2 - 16}{4v}$$

$$\text{הגדירו: } F_center(u, v) := \left[\frac{u}{2}, -\frac{u^2 - v^2 - 16}{4v} \right]$$

רשמו את הביטוי $F_center(r, r)$ ופשטו אותו מספר פעמים.

כדי לקבל נקודות רבות (של מרכזים של מעגלי-תשע-הנקודות) השתמשו בפונקציה vector:

$$\text{vector}(F_center(r, r), i, 1, 60)$$

שרטטו (זכרו להפעיל Simplify Before Plotting) את הביטוי מספר פעמים עד שתקבלו תמונה

מקדימה סבירה של המקום הגיאומטרי המבוקש. מהי השערתכם לגבי התיאור האלגברי של

המקום הגיאומטרי הזה? בדקו אותה.

תארו את המקום הגיאומטרי בדרך אלגברית. מה הקשר בינו לבין הצלע AB של המשולש?

ב. מצאו את המקום הגיאומטרי של המרכזים של מעגלי-תשע-הנקודות עבור משולשים המתקבלים

מהזזת הקטע AB במישור על-ידי וקטור $[s, t]$, $t \neq 6$ (מדוע?). תארו את המקום הגיאומטרי

בדרך אלגברית. מה הקשר בינו לבין הקדקוד C והצלע AB של המשולש?

$$[C := [2, 6], A := [-4, 0] + [s, t], B := [4, 0] + [s, t]]$$

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name9.5.dfw