



8. מקומות גיאומטריים מהמעלה השניה

מבוא

ביחידה זו נביא מבט מאחד על הפרבולה, האליפסה וההיפרבולה. בדומה לחקירת הגיאומטריה של פרבולה באמצעות ה"מיתר המיוחד" (מיתר מוקדי המאונך לציר הפרבולה) נחקור את הגיאומטריה של אליפסה והיפרבולה באמצעות מיתרים מוקדיים. בעקבות החקירה נציג את שלושת המעקמים כמקומות גיאומטריים של נקודות שיחס מרחקיהן מנקודה נתונה (מוקד) ומישר נתון (מדריך) הוא גודל קבוע e (אקסצנטריות). נדגים זאת לגבי שניוניות (מעקמים בעלי משוואה בשני משתנים מהמעלה השניה) בעלות ציר סימטריה משופע.

רשימת הפעילויות:

- פעילות 8.1 – גיאומטריה של אליפסה
- פעילות 8.2 – גיאומטריה של היפרבולה
- פעילות 8.3 – מבט מאחד
- פעילות 8.4 – ציר סימטריה משופע

פעילות 8.1 – גיאומטריה של אליפסה

א. שרטטו את האליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ וסמנו את המוקדים. מהי האקסצנטריות?

הוסיפו לשרטוט את המיתר העובר דרך המוקד הימני (שיסומן F1) ומאונך לציר הראשי של האליפסה. נקרא לו "המיתר המוקדי". (יש כמובן מיתר דומה העובר דרך המוקד השני). חשבו את שיפועי המשיקים לאליפסה בקצות המיתר המוקדי. מה מצאתם?

ב. שרטטו את המשיקים לאליפסה בקצות המיתר המוקדי. תוכלו להיעזר בתוכנה למציאת משוואת משיק לגרף של פונקציה סתומה:

$$\text{IMP_TANGENT} \left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - 1, x, y, 4, 1.8 \right) =$$

באיזו נקודה נחתכים המשיקים?

העבירו מיתר באליפסה העובר דרך המוקד הימני ודרך הנקודה (3, ___) שעל האליפסה. שרטטו את זוג המשיקים לאליפסה בקצות מיתר זה ומצאו את נקודת החיתוך שלהם. מהי משוואת הישר שעליו נפגשו שני זוגות המשיקים? חשבו את המרחקים מנקודת קצה של המיתר אל המוקד ואל הישר שבו נפגשו זוגות המשיקים. מה היחס בין המרחקים? מהי השערתכם בשלב זה?

ג. נכליל את הממצאים שהתקבלו בסעיף הקודם. הגדירו שיעור x של נקודה כללית P על האליפסה הנתונה $x_1 =$. נגביל אותו כך שיוכל להוות שיעור ראשון של נקודה על האליפסה הנתונה שבה, כזכור $a = 5$. קבעו את תחום הערכים שלו: $x_1 \in \text{Real}[-5, 5]$

חשבו את שיעורי y המתאימים ל- x_1 . השלימו את שיעור y $P = [x_1, \text{___}]$

$$\frac{|P - F1|}{6.25 - x_1} =$$

חשבו את המנה:

מה המשמעות הגיאומטרית של המונה? _____ ושל המכנה? _____
מה משמעות התוצאה?

בהסתמך על מה שלמדנו ביחידה 6 מה לדעתכם יתקבל, כאשר תשרטטו את הגרף הנתון ע"י המשוואה:

$$|[x, y] - F1| = \frac{4}{5} \cdot |x - 6.25|$$

בדקו והסבירו.

ד. שרטטו שוב את האליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

הציבו $2x$ במקום x ו- $2y$ במקום y ושרטטו.

הציבו $\frac{x}{1.5}$ במקום x ו- $\frac{y}{1.5}$ במקום y ושרטטו.

מה קיבלתם? מהי האקסצנטריות של כל אחת מהאליפסות שהתקבלו?

שרטטו אליפסה נוספת בעלת אקסצנטריות $\frac{4}{5}$.

מהי מסקנתכם?

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name8.1.dfw

פעילות 8.2 – גיאומטריה של היפרבולה

שרטטו את ההיפרבולה שמשוואתה $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ וסמנו את המוקדים. מהי האקסצנטריות?

נסחו ופתרו מערכת תרגילים א – ד, כמו בפעילות 8.1 לגבי ההיפרבולה הנתונה.

סכמו את התוצאות.

התייחסו למשותף ולשונה בתכונות של שלוש העקומות: פרבולה, אליפסה והיפרבולה.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name8.2.dfw

פעילות 8.3 – מבט מאחד

נשרטט ונחקר מקומות גיאומטריים של נקודות במישור שיחס מרחקיהן אל נקודה נתונה (מוקד) ואל ישר נתון (מדריך) הוא גודל קבוע e (הנקרא אקסצנטריות).

א. נבחר מוקד בראשית הצירים ומדריך שמשוואתו $x = -4$.

שרטטו את הגרפים המוגדרים ע"י המשוואה $|x + 4| = e|x, y] - [0, 0]|$ עבור

$$e = 2, e = 3/4, e = 1$$

סמנו את המוקד ואת המדריך.

פשטו כל אחת משלוש המשוואות ורשמו אותן כמשוואות במעלה שנייה שאגפן הימני אפס.

ב. בפעילות קודמות ראינו לגבי דוגמאות של פרבולה, אליפסה והיפרבולה כי שיפועי המשיקים בקצות "המיתר המוקדי" שווים בערכם המוחלט לאקסצנטריות.

הוכיחו כי הקשר בין שיפועי המשיקים בקצות המיתר המוקדי ונתוני המקום הגיאומטרי מתקיים לכל פרבולה, אליפסה והיפרבולה?

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name8.3.dfw

פעילות 8.4 – ציר סימטריה משופע

ניעזר בתוכנה כדי לטפל גרפית ואלגברית בעקומות בעלות ציר סימטריה משופע.
נתונים: מדריך שמשוואתו $3x + 4y - 15 = 0$ ומוקד בנקודה ששיעוריה $(1, 1)$.

א. רשמו משוואת פרבולה כתנאי על מרחקים, שרטטו את המדריך, המוקד והפרבולה.
פשטו את המשוואה.
הוסיפו לשרטוט את ציר הסימטריה של הפרבולה ואת קדקודה.

ב. רשמו משוואת אליפסה בעלת אקסצנטריות $e = 3/4$ כתנאי על מרחקים.
שרטטו את המדריך, המוקד והאליפסה.
פשטו את המשוואה.
הוסיפו לשרטוט את ציר הסימטריה הראשי של האליפסה וסמנו עליו את קדקודה.

ג. רשמו משוואת היפרבולה בעלת אקסצנטריות $e = 4/3$ כתנאי על מרחקים.
שרטטו את המדריך, המוקד וההיפרבולה.
פשטו את המשוואה.
הוסיפו לשרטוט את ציר הסימטריה הראשי של ההיפרבולה וסמנו עליו את קדקודה.

ד. מהי זווית השיפוע (ביחס לכיוון החיובי של ציר- x) של המדריך לשלוש העקומות ששרטטתם?
בצעו העתקת הזזה והעתקת סיבוב של הפרבולה/אליפסה/היפרבולה כך שתתקבל עקומה
חופפת בעלת משוואה קנונית.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name8.4.dfw