7. ההיפרבולה

מבוא

ביחידה זו אנו מגדירים היפרבולה כמקום גיאומטרי של נקודות אשר הפרש מרחקיהן משני מוקדים הוא מספר קבוע. בעקבות יחידה 6 מנסחים ופותרים סדרת תרגילים כדי להגיע להגדרה חלופית של היפרבולה בעזרת מוקד ומדריך ולחקור את המצב ההדדי בין ישרים והיפרבולה. תוך כדי הפעילויות מתברר במה דומות ובמה נבדלות אליפסות והיפרבולות.
בפעילות האחרונה נעזרים בתוכנה לתרגול שאלות המשלבות אליפסה והיפרבולה.

רשימת הפעילויות:

פעילות 7.1 – מגדירים ומשרטטים היפרבולה

פעילות 7.2 – הגדרה חלופית להיפרבולה

פעילות 7.3 – היפרבולה וישר

פעילות 7.4 – משיקים להיפרבולה המאונכים זה לזה

פעילות 7.5 – שאלות

פעילות 7.1 – מגדירים ומשרטטים היפרבולה

א. **הגדרה**: נתונות שתי נקודות F1 ו- F2 במישור, ונתון מספר חיובי a. המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור שהפרש מרחקיהן אל שתי הנקודות הנתונות שווה ל- a נקרא היפרבולה. הנקודות F1 ו- F2 נקראות המוקדים של ההיפרבולה.

(המשמעות הגיאומטרית של המספר a תתברר בהמשך.)

ניעזר בתוכנה לבניית המקום הגיאומטרי כאוסף של נקודות.

נסמן שני מוקדים **F2:= [-5, 0]** , **F1:= [5, 0]** ונחפש בשרטוט נקודות P:= [x, y] אשר הפרש מרחקיהן אל המוקדים הוא **6**.

לדוגמה: |P – F2| = 7 , |P – F1| = 5

נסחו ופתרו מערכת תרגילים כמו בפעילות 6.1 וסכמו את התוצאות.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name7.1.dfw

פעילות 7.2 – הגדרה חלופית להיפרבולה

א. חקרו בעזרת שרטוטים את השפעת המרחק בין המוקדים על צורת היפרבולה אשר הפרש המרחקים של כל נקודה אל המוקדים הוא 6.

a. נעבור למקרה הכללי: את סכום המרחקים נהוג לסמן 2a, את המרחק בין המוקדים 2c כאשר c>a>0. נבחר: F2:= [-c, 0] , F1:= [c, 0]

אליפסה מוגדרת ע"י המשוואה ||P – F1| - |P – F2|| = 2a

חזרה על הפישוט האלגברי שבצענו בפעילות הקודמת נותן את המשוואה:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

נהוג לסמן: $b^2 = c^2 – a^2$ (הסימון הזה בעל משמעות משום ש- c>a>0)

מקבלים את המשוואה הבאה:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

היא נקראת המשוואה הקנונית של היפרבולה.

מה המשמעות הגיאומטרית של b?

ב. נהוג לסמן את היחס בין 2c (המרחק בין המוקדים) ל- 2a (סכום מרחקי נקודה אל המוקדים)

על-ידי e. אילו ערכים יכול e לקבל? $e=\frac{c}{a}$ נקרא *האקסצנטריות* של היפרבולה.

הסבירו את השפעת האקסצנטריות על צורתה הגרפית של ההיפרבולה.

ג. במהלך הפישוט מגיעים למשוואה:

$$-\frac{c\cdot x+a^2}{a}=\sqrt{x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}$$

היעזרו בה לקבלת הגדרה חלופית להיפרבולה.

ה. מצאו את שיעורי המוקדים, את משוואת המדריך ואת האקסצנטריות של ההיפרבולה אשר משוואתה $\frac{x^2}{3}-y^2=1$.

שרטטו את ההיפרבולה.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name7.2.dfw

פעילות 7.3 – היפרבולה וישר

א. נתונה היפרבולה שמשוואתה $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

חקרו את המצב ההדדי של ההיפרבולה הנתונה ושתי משפחות הישרים מפעילות 6.3.

ב. עברו למקרה הכללי ומצאו את תנאי ההשקה של ישר שמשוואתו $y = mx + n$ להיפרבולה שמשוואתה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name7.3.dfw

פעילות 7.4 – משיקים להיפרבולה המאונכים זה לזה

א. נתונה היפרבולה ע"י המשוואה הקנונית $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. מצאו את המקום הגיאומטרי של נקודות החיתוך של זוגות משיקים להיפרבולה המאונכים זה לזה.

הדרכה: רשמו תנאי מתאים בצורת משוואה בשני משתנים ושרטטו את העקומה במישור המוגדרת על-ידי המשוואה. הסבירו מה קיבלתם.

ב. הדגימו בשרטוט זוג משיקים מאונכים להיפרבולה.

ג. מצאו את המקום הגיאומטרי של נקודות החיתוך של זוגות משיקים להיפרבולה הנתונה ע"י המשוואה הקנונית $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ המאונכים זה לזה. (כלומר, מקום גיאומטרי של הנקודות מהן רואים את ההיפרבולה בזווית ישרה.)

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name7.4.dfw

פעילות 7.5 – שאלות

א. האליפסה שמשוואתה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ וההיפרבולה שמשוואתה: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$ נחתכות בנקודה A ששיעוריה (3, 5).
נתון שהמשיק לאליפסה והמשיק להיפרבולה בנקודת החיתוך A מאונכים זה לזה.
מצאו את משוואת האליפסה.
שרטטו את האליפסה, את ההיפרבולה ואת המשיקים בנקודה A.

ב. נתונה אליפסה שמשוואתה: $4x^2 + 9y^2 = 36$.
מצאו היפרבולה שמוקדיה זהים למוקדי האליפסה הזאת, כך שהאליפסה וההיפרבולה נחתכות בזווית ישרה. (המשיקים בנקודות החיתוך מאונכים זה לזה.)

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name7.5.dfw