6. האליפסה

מבוא

ביחידה זו אנו מגדירים אליפסה כמקום גיאומטרי של נקודות אשר סכום מרחקיהן אל שני מוקדים הוא מספר קבוע. על-ידי מניפולציות אלגבריות עוברים להגדרה שקולה של אותה אליפסה – בעזרת המרחקים אל מוקד ומדריך. המצב ההדדי בין ישרים ואליפסה נבדק ומודגם בפעילות השלישית תוך כדי בניית התנאי שישר משיק לאליפסה. בפעילות הרביעית בונים מקום גיאומטרי של נקודות חיתוך של משיקים לאליפסה המאונכים זה לזה.

כל הדוגמאות ביחידה זו הן אליפסות בעלות משוואות קנוניות. טיפול כללי יותר ייעשה ביחידה 8.

רשימת הפעילויות:

פעילות 6.1 – מגדירים ומשרטטים אליפסה

פעילות 6.2 – הגדרה חלופית לאליפסה

פעילות 6.3 – אליפסה וישר

פעילות 6.4 – משיקים לאליפסה המאונכים זה לזה

פעילות 6.1 – מגדירים ומשרטטים אליפסה

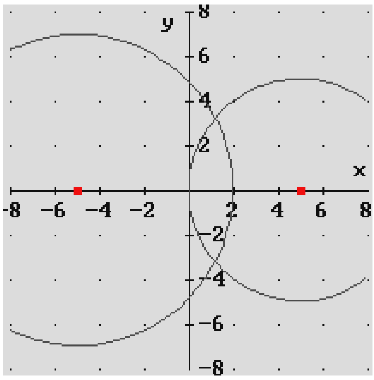
א. **הגדרה**: נתונות שתי נקודות F1 ו- F2 במישור, ונתון מספר חיובי a. המקום הגיאומטרי של כל הנקודות M במישור כך שסכום המרחקים MF1 + MF2 יהיה שווה ל- a נקרא אליפסה. הנקודות F1 ו- F2 נקראות המוקדים של האליפסה.

(המשמעות הגיאומטרית של המספר a תתברר בהמשך.)

ניעזר בתוכנה לבניית המקום הגיאומטרי כאוסף של נקודות.

נסמן שני מוקדים **F2:= [-5, 0] , F1:= [5, 0]** ונחפש בשרטוט נקודות P:= [x, y] אשר סכום מרחקיהן אל המוקדים הוא **12**.

לדוגמה: |P – F2| = 7 , |P – F1| = 5



שרטטו את המעגלים (Options > Simplify Before Plotting). סמנו את המרכזים.

כדי לראות מעגל "עגול" - בחרו Set > Aspect Ratio > Reset .

נחשב את שיעורי נקודות החיתוך של המעגלים:

$$|P - F1| = 5 \wedge |P - F2| = 7$$

$$\sqrt{x^2 - 10\cdot x + y^2 + 25} = 5 \wedge \sqrt{x^2 + 10\cdot x + y^2 + 25} = 7$$

$$\text{SOLVE}(\sqrt{x^2 - 10\cdot x + y^2 + 25} = 5 \wedge \sqrt{x^2 + 10\cdot x + y^2 + 25} = 7,\ [x, y])$$

$$\left(x = \frac{6}{5} \wedge y = -\frac{2\cdot\sqrt{66}}{5}\right) \vee \left(x = \frac{6}{5} \wedge y = \frac{2\cdot\sqrt{66}}{5}\right)$$

כדי לסמן את הנקודות בשרטוט נשתמש בפקודה SOLUTIONS (<u>שצריך להקליד</u>)

$$\text{SOLUTIONS}(\sqrt{x^2 - 10\cdot x + y^2 + 25} = 5 \wedge \sqrt{x^2 + 10\cdot x + y^2 + 25} = 7,\ [x, y])$$

הקישו = לחישוב ותקבלו:

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{2\cdot\sqrt{66}}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{2\cdot\sqrt{66}}{5} \end{bmatrix}$$

הוסיפו את הנקודות לשרטוט.

הוסיפו לשרטוט את נקודות החיתוך של שני מעגלים נוספים, לדוגמה המעגלים המוגדרים ע"י התנאים הבאים: |P – F2| = 3 , |P – F1| = 9

בחרו דוגמה נוספת המקיימת: |P – F1| = *k* וגם |P – F2| = 12 - k והוסיפו את הנקודות המתקבלות לשרטוט. עבור אילו ערכים של k יתקבלו פתרונות ממשיים למערכת המשוואות?

___ ≤ *k* ≤ ___

נוכל לבנות נקודות נוספות רבות בבת-אחת בעזרת ההוראה VECTOR:

```
VECTOR(SOLUTIONS((P - F1)^2 = k^2 ∧ (P - F2)^2 = (12 - k)^2, [x, y]), k, 1, 11, 0.5)
```

(גודל הצעד, ערך אחרון, ערך ראשון ,משתנה,..ביטוי.... ....)vector

שרטטו. (אם Simplify Before Plotting פעיל - אין צרך לחשב תחילה)

הקטינו את גודל הצעד בהוראה למחשב והגדילו את מספר הנקודות.

עתה רשמו את התנאי בהגדרת אליפסה כמקום גיאומטרי:

|P – F1| + |P – F2| = 12

ושרטטו! מה קיבלתם? ______________________________

ב. משוואת האליפסה.

התבוננו בצעדי הפישוט האלגברי שלפניכם:

```
#20:  [P := [x, y], F1 := [5, 0], F2 := [-5, 0]]
#21:  |P - F1| + |P - F2| = 12
#22:  √(x^2 - 10·x + y^2 + 25) + √(x^2 + 10·x + y^2 + 25) = 12
#23:  √(x^2 - 10·x + y^2 + 25) = - √(x^2 + 10·x + y^2 + 25) + 12
```

העלאה בריבוע של שני האגפים

```
#24:  (√(x^2 - 10·x + y^2 + 25) = - √(x^2 + 10·x + y^2 + 25) + 12)^2
#25:  x^2 - 10·x + y^2 + 25 = - 24·√(x^2 + 10·x + y^2 + 25) + x^2 + 10·x + y^2 + 169
#26:  24·√(x^2 + 10·x + y^2 + 25) = 20·x + 144
```

מחלקים את שני האגפים ב- 24

$$\#27: \quad \frac{24\cdot\sqrt{x^2 + 10\cdot x + y^2 + 25} = 20\cdot x + 144}{24}$$

$$\#28: \quad \sqrt{x^2 + 10\cdot x + y^2 + 25} = \frac{5\cdot x + 36}{6}$$

לביצוע פעולה על שני אגפי ביטוי – יש להעתיק את הביטוי לשורת העריכה בעזרת מקש F4

לפישוט ביטוי על-ידי פתיחת סוגריים: Simplify > Expand (Ctrl+E)

המשמעות הגיאומטרית של הביטוי באגף שמאל היא מרחק של נקודה ששיעוריה (x, y) אל הנקודה ששיעוריה (__ , __) (השלימו). המשמעות הגיאומטרית של הביטוי באגף ימין תתברר בפעילות הבאה. מומלץ לשרטט את העקומה המתקבלת מהמשוואה בשורה 28#.

נמשיך לפשט:

$$\#29: \quad \left(\sqrt{(x^2 + 10\cdot x + y^2 + 25)} = \frac{5\cdot x + 36}{6}\right)^2$$

$$\#30: \quad x^2 + 10\cdot x + y^2 + 25 = \frac{25\cdot x^2}{36} + 10\cdot x + 36$$

$$\#31: \quad x^2 + 10\cdot x + y^2 - \left(\frac{25\cdot x^2}{36} + 10\cdot x\right) = 11$$

$$\#32: \quad \frac{11\cdot x^2}{36} + y^2 = 11$$

$$\#33: \quad \frac{\frac{11\cdot x^2}{36} + y^2 = 11}{11}$$

$$\#34: \quad \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$

מומלץ לשרטט את העקומה המתקבלת מהמשוואה בשורה #34.

בשורה #34 רשומה משוואה *קנונית* של *אליפסה*. מה, לדעתכם, הקשר בין הנתונים לבין מקדמי המשוואה? ____

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name6.1.dfw

פעילות 6.2 – הגדרה חלופית לאליפסה

א. בפעילות זו הנכם מתבקשים לחקור, בעזרת שרטוטים, את השפעת המרחק בין המוקדים על צורת אליפסה אשר בה סכום המרחקים של כל נקודה מן המוקדים הוא 12.

שרטטו את העקומות המוגדרות ע"י המשוואה |P – F1| + |P – F2| = 12 במקרים הבאים:

- F1:= [5, 0] , F2:= [-5, 0]
- F1:= [3, 0] , F2:= [-3, 0]
- F1:= [1, 0] , F2:= [-1, 0]
- F1:= [6.5, 0] , F2:= [-6.5, 0]

מהן מסקנותיכם?____

ב. נעבור למקרה הכללי: את סכום המרחקים נהוג לסמן 2a, את המרחק בין המוקדים 2c כאשר a>c>0. נבחר: F1:= [c, 0] , F2:= [-c, 0]

אליפסה מוגדרת ע"י המשוואה |P – F1| + |P – F2| = 2a

חזרו על הפישוט האלגברי שבצענו בפעילות הקודמת עד שתגיעו למשוואה:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

נהוג לסמן: $b^2 = a^2 – c^2$ (הסימון הזה בעל משמעות משום ש- a>c>0)

מקבלים את המשוואה הבאה:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

היא נקראת המשוואה הקנונית של האליפסה.

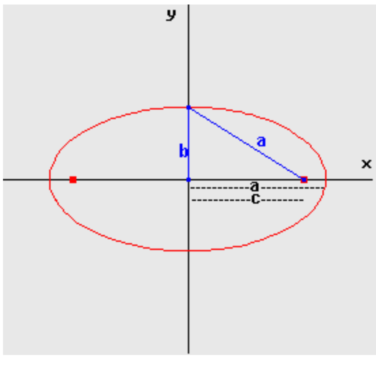
מה המשמעות הגיאומטרית של b?

ג. נהוג לסמן את היחס בין 2c (המרחק בין המוקדים) ל- 2a (סכום מרחקי נקודה אל המוקדים)

על-ידי e. אילו ערכים יכול e לקבל? ___ < e < ____ היחס $e=\frac{c}{a}$ נקרא **האקסצנטריות**

(התרחקות מהמרכז) של האליפסה.

הסבירו את השפעת האקסצנטריות על צורתה הגרפית של אליפסה.



ד. היעזרו במהלך הפישוט האלגברי שבצעתם בסעיף ב' לעיל ובסעיף ב' בפעילות 6.1 והראו כי:

$$\sqrt{x^2 - 2cx + y^2 + c^2} = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right)$$

$$\sqrt{x^2 + 2cx + y^2 + c^2} = \frac{c}{a}\left(x - \left(-\frac{a^2}{c}\right)\right)$$

מה המשמעות הגיאומטרית של כל אחד מהאגפים? ______________________________

ניתן **הגדרה** חלופית לאליפסה:

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שיחס מרחקיהן אל נקודה נתונה (**מוקד**) ואל ישר נתון (**מדריך**, שאינו עובר דרך הנקודה) הוא קבוע וקטן מ 1 נקרא אליפסה. יחס זה נקרא האקסצנטריות של האליפסה.

בסימונים הקודמים משוואת האליפסה היא:

$$|[x, y] - [c, 0]| = e\left|x - \frac{a^2}{c}\right|$$

או

$$|[x, y] - [-c, 0]| = e\left|x + \frac{a^2}{c}\right|$$

ה. לאליפסה שני מדריכים, מדריך לכל מוקד, המוגדרים ע"י המשוואות $x = \frac{a^2}{c}$ ו- $x = -\frac{a^2}{c}$.

מהו מרחק מן המוקד אל המדריך הקרוב לו? ________________________

ו. מהם שיעורי המוקדים, ומהי האקסצנטריות של האליפסה אשר משוואתה $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$?

שרטטו.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name6.2.dfw

פעילות 6.3 – אליפסה וישר

נתונה אליפסה שמשוואתה $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. נחקור את המצב ההדדי של האליפסה ושתי משפחות של ישרים.

א. משפחת ישרים המוגדרת ע"י המשוואה הפרמטרית $y=\frac{3}{2}x+n$, כאשר n הוא מספר ממשי כלשהו.

שרטטו את האליפסה ומספר ישרים מן המשפחה הנתונה.

למציאת הפתרונות של מערכת המשוואות הקלידו את הפקודה הבאה וחשבו **=**

$$\text{SOLUTIONS}\left(\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 \wedge y=\frac{3}{2}\cdot x+n,\ [x,\ y]\right)$$

הסבירו את משמעות הפתרונות.

מצאו תנאי שישר מהמשפחה יחתוך את האליפסה בשתי נקודות שונות ושרטטו ישרים המקיימים את התנאי.

עבור אילו ערכי n יתקבל "פתרון כפול של משוואה ריבועית"? מה המשמעות הגיאומטרית?

מהן משוואות המשיקים? שרטטו. סמנו את נקודות ההשקה בשרטוט.

ב. כמו בסעיף א' לגבי המשפחה המוגדרת ע"י המשוואה הפרמטרית $y=-\frac{3}{4}x+n$ כאשר n הוא מספר ממשי כלשהו.

ג. נעבור למקרה הכללי: מהו תנאי ההשקה של ישר המוגדר ע"י המשוואה הפרמטרית $y=mx+n$ לאליפסה המוגדרת ע"י המשוואה הפרמטרית $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, כאשר m ו- n הם מספרים ממשיים כלשהם.

ד. מצאו משוואות של ישרים המשיקים לאליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, אך אינן מהצורה $y=mx+n$.

ה. היעזרו בפקודה IMP_TANGENT של התוכנה כדי להראות כי משוואת המשיק בנקודה ששיעוריה הם (x1, y1) הנמצאת על האליפסה, אשר אינה קדקוד ראשי, היא:

$$\frac{x1\cdot x}{a^2}+\frac{y1\cdot y}{b^2}-1=0$$

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name6.3.dfw

פעילות 6.4 – משיקים לאליפסה המאונכים זה לזה

א. נתונה אליפסה ע"י המשוואה הקנונית $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. רשמו משוואה של ישר בעל שיפוע העובר דרך הנקודה T ששיעוריה (p, q) . מאילו נקודות במישור אפשר להעביר שני משיקים לאליפסה הנתונה? מאילו נקודות במישור אפשר להעביר רק משיק אחד לאליפסה?

ב. מצאו את המקום הגיאומטרי של נקודות החיתוך של זוגות משיקים לאליפסה המאונכים זה לזה.
הדרכה: רשמו תנאי מתאים בצורת משוואה בשני משתנים ושרטטו את העקומה במישור המוגדרת על-ידי המשוואה. הסבירו מה קיבלתם.

ג. הדגימו בשרטוט שני זוגות משיקים מאונכים לאליפסה.

ד. מצאו את המקום הגיאומטרי של נקודות החיתוך של זוגות משיקים לאליפסה הנתונה ע"י המשוואה הקנונית $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ המאונכים זה לזה. (כלומר, מקום גיאומטרי של הנקודות מהן רואים את האליפסה בזווית ישרה.)

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name6.4.dfw