5. גיאומטריה של פרבולות

מבוא

שתי הפעילויות הראשונות ביחידה זו מגשרות בין שני היבטים שונים על פרבולה: ההיבט האלגברי שבו פרבולה היא גרף של פונקציה ריבועית, וההיבט הגיאומטרי שבו מוגדרת פרבולה כמקום גיאומטרי של נקודות בעלות מרחק שווה ממוקד ומדריך. הגישור נעשה באמצעות הגדרת *המיתר המוקדי* בפרבולה וחקירת התכונות הגיאומטריות שלו. בפעילות האחרונה נראה שכל הפרבולות דומות לפרבולה שמשוואתה $y = x^2$.

בדיקת תנאי השקה של ישר לפרבולה ויישומם בשאלות בפעילות השלישית, מובילים לחשיפת תכונות גיאומטריות מעניינות (בפעילות הרביעית) המקשרות בין מיתרים העוברים דרך המוקד, משיקים לפרבולה והמדריך שלה.

רשימת הפעילויות:

פעילות 5.1 – "המיתר המוקדי" של פרבולה

פעילות 5.2 – פרבולה כמקום גיאומטרי

פעילות 5.3 – משיקים לפרבולה

פעילות 5.4 – זוגות מיוחדים של משיקים לפרבולה

פעילות 5.5 – כל הפרבולות דומות לפרבולה הסטנדרטית

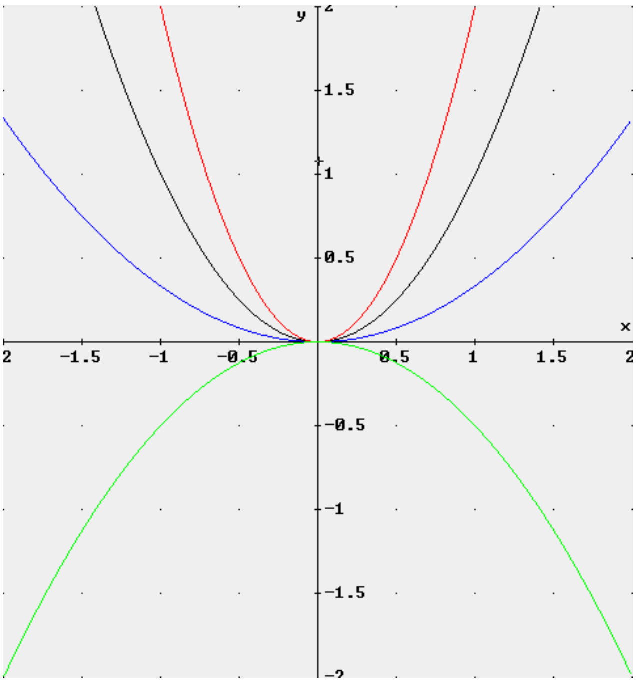
פעילות 5.1 – "המיתר המוקדי" של פרבולה

א.לגרף של פונקציה ריבועית צורה גיאומטרית הנקראת פרבולה.

רשמו במחשב את ארבע המשוואות הבאות (המגדירות פונקציות ריבועיות):

$$y = x^2 \quad y = 2x^2 \quad y = \frac{1}{3}x^2 \quad y = -\frac{1}{2}x^2$$

שרטטו את הגרפים של הפונקציות. הוסיפו כתוביות – רצוי בצבעים מתאימים לצבעי הגרפים



התבוננו בגרפים וענו על השאלה:

מה הקשר בין ערך הפרמטר a וצורת הפרבולה $y = ax^2$ $(a \neq 0)$?

ב. סמנו על הפרבולה שמשוואתה $y = x^2$ שתי נקודות סימטריות (לגבי ציר y) A ו- B כך שאורך המיתר המחבר אותן הוא 1. חשבו את השיפוע של המשיק לפרבולה בשתי הנקודות שסימנתם.

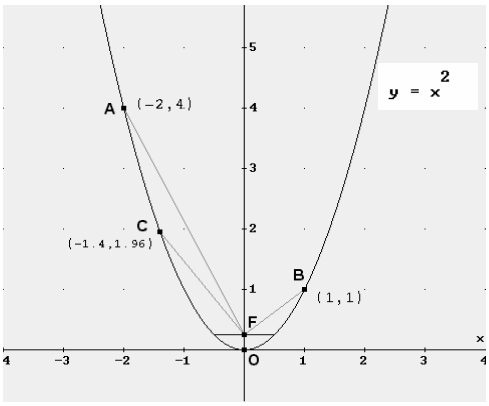
הגדירו ב- Derive את הנקודות A:= [__, __] ו- B:= [__, __]. הגדירו משתנה נוסף ב- Derive, a:= כדי שתוכלו להשתמש בו בהמשך לטיפול בגרף הנתון על-ידי המשוואה $y = ax^2$.

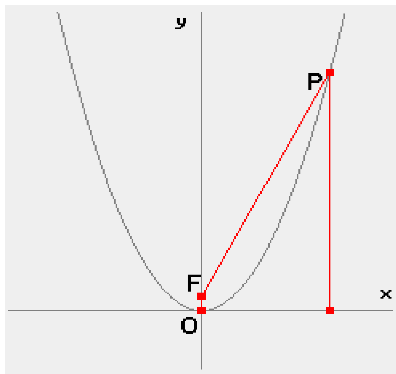
ג. על שלוש הפרבולות האחרות סמנו נקודות שבהן השיפועים של המשיקים לפרבולות שווים לשיפועי המשיקים לפרבולה הסטנדרטית (שמשוואתה היא $y = x^2$) בנקודות A , B (שסימנתם בסעיף הקודם) בהתאמה.

ד. בכל אחת מהפרבולות שרטטו את המיתר המחבר את שתי הנקודות הסימטריות מסביב לציר *y* שסימנתם (צבעו כל מיתר בצבע הפרבולה המתאימה) וחשבו את אורך המיתרים.
הסיקו מסקנות מהשרטוט ומהחישוב.
הסבירו מדוע יכול *האורך של המיתר* אשר שרטטתם בכל פרבולה לשמש *מדד* המאפיין את צורת הפרבולה?

ה. הראו (ללא המחשב) כי *אם* המרחק בין שתי נקודות סימטריות (לגבי ציר y) G, E על פרבולה $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ הוא $\frac{1}{|a|}$, אז שיפועי המשיקים בנקודות אלו הם 1 או -1.
הראו כי *אם* שיפועי המשיקים בשתי נקודות סימטריות על פרבולה שמשוואתה היא $y = ax^2$ הם 1 או -1, *אז* המרחק בין שתי הנקודות הוא $\frac{1}{|a|}$.

ו. סמנו ב- F את הנקודה בה חותך המיתר GE את ציר *y*.
מהם שיעורי F? [0, __] . לקטע המחבר נקודה על הפרבולה עם F, נקרא *רדיוס*.
חשבו את אורכי הרדיוסים CF, BF, AF, OF בשרטוט שלפניכם.
לחישוב מרחק בין שתי נקודות רשמו לדוגמה, |A – F|= , אפשר לעבור לכתיב עשרוני Decimal.
האם נראה לכם שיש חוקיות? נסחו השערה ובדקו אותה עבור נקודה כללית על הפרבולה $y = x^2$





עבור פרבולה שמשוואתה $y = ax^2$ הנקודה $F := [0, \frac{1}{4a}]$ נקראת *מוקד*.
למיתר המאונך לציר הסימטריה של הפרבולה ועובר דרך המוקד נקרא *המיתר המוקדי*.

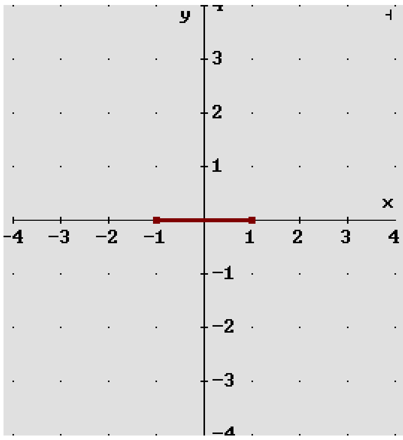
ז. הראו כי המרחק בין נקודה $P:=[x, ax^2]$ על הפרבולה ו F נתון על-ידי:

$$|P - F| = x^2 \cdot |a| + \frac{1}{4 \cdot |a|}$$

היעזרו בפקודות Simplify > Expand
נסחו במילים את התוצאה לעיל.

ח. "המיתר המוקדי מחפש פרבולה."

(1) שרטטו את הקטע [[-1, 0], [1, 0]] ומצאו פרבולה כך שהקטע הוא המיתר המוקדי שלה.



(2) מצאו פרבולה כך שהקטע [[2, 0], [6, 0]] הוא המיתר המיוחד שלה. שרטטו.

(3) מצאו פרבולה כך שהקטע [[-1, -2], [-1, 2]] הוא המיתר המיוחד שלה. שרטטו.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name5.1.dfw

פעילות 5.2 – פרבולה כמקום גיאומטרי

נראה עתה שנקודות Q:=[x ,y] המקיימות את התנאי $|[x,y]-[0,\frac{1}{4a}]|=y+\frac{1}{4|a|}$ (בסימונים של התוכנה), נמצאות על הפרבולה שמשוואתה היא $y=ax^2$. נבדוק תחילה מקרה פרטי $y=2x^2$, שנוכל להדגים בשרטוט.

א. הציבו $\frac{1}{2}$ במקום a ושרטטו את הגרף המוגדר ע"י הביטוי (הפעילו Simplify Before Plotting).

מה קיבלתם?

ב. נברר את המשמעות של כל אחד משני אגפים בביטוי $|Q-[0,\frac{1}{2}]|=y+\frac{1}{2}$:

סמנו בשרטוט את הנקודה $[0,\frac{1}{2}]$ ואת הישר שמשוואתו $y+\frac{1}{2}=0$

הוסיפו לשרטוט את הגרפים של הביטויים הבאים:

$$\left|Q-\left[0,\ \frac{1}{2}\right]\right| = 3 \vee y+\frac{1}{2}=3$$

$$\left|Q-\left[0,\ \frac{1}{2}\right]\right| = 2 \vee y+\frac{1}{2}=2$$

מה משמעות הביטויים?

הגדרת הפרבולה כמקום גיאומטרי

המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור, שמרחקן מנקודה F (מוקד) שווה למרחקן אל ישר L (מדריך) שאינו עובר דרך F, נקרא בשם פרבולה.

מהו המרחק בין המוקד והמדריך בדוגמה לעיל? ______ מהו אורך המיתר המוקדי? _____

ג. מצאו את משוואת הפרבולה שקדקודה בראשית הצירים, ציר הסימטריה שלה הוא ציר x והמרחק בין המוקד והמדריך הוא p.

מהם שיעורי המוקד?_______ מהי משוואת המדריך ? _______

מהו אורך המיתר המוקדי שלה? _____

הגדירו ב- Derive משתנה p:= מאחר והגדרתם מקודם נקודה P.

המשוואה שקיבלתם נקראת *המשוואה הקנונית של הפרבולה*; p נקרא *הפרמטר* של הפרבולה.

בדקו את השפעת ערכו של הפרמטר על צורת הפרבולה.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name5.2.dfw

פעילות 5.3 – משיקים לפרבולה

א. תנאי השקה של ישר שמשוואתו $y = mx + n$ $(m \neq 0)$ לפרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ $(p\neq0)$ מתקבל על-ידי פתרון המשוואה הבאה:

$$\frac{y^2}{2\cdot p} = \frac{y-n}{m}$$

$$\text{SOLVE}\left(\frac{y^2}{2\cdot p} = \frac{y-n}{m},\ y\right)$$

$$y = \frac{p - \sqrt{p\cdot(p - 2\cdot m\cdot n)}}{m} \vee y = \frac{\sqrt{p\cdot(p - 2\cdot m\cdot n)} + p}{m}$$

מהי המשמעות של פתרונות המשוואה? מצאו את תנאי ההשקה של הישר לפרבולה.

ב. מצאו משוואת המשיק לפרבולה שמשוואתה (הסתומה) $y^2 = 2px$ בנקודה [x1, y1] שעליה.
על-ידי התוכנה. הפקודה היא: IMP_TANGENT(y^2 – 2px, x, y, x1, y1)
עתה, הראו כי משוואת המשיק לפרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ בנקודה [x1, y1] עליה נתונה ע"י הנוסחה: $y1\cdot y = p(x + x1)$

ג. שרטטו את הפרבולה שמשוואתה $y^2 = -9x$ ובנו לה משיק בנקודה [6 , ___] הנמצאת עליה.

מהי נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x?

מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x בנו משיק שני לפרבולה.

מהי הזווית (במעלות) בין שני המשיקים?

תזכורת: נתונים שני ישרים ששיפועיהם הם m1 ו- m2. נסמן ב-α את הזוית בין שני הישרים. אזי:

$$\text{TAN}(\alpha\cdot°) = \frac{m1 - m2}{1 + m1\cdot m2}$$

סימון הזווית נמצא בסרגל האותיות היווניות, סימון המעלות בסרגל הסמלים המתמטיים.

למציאת הערך של α הפעילו מציאת פתרון נומרי (NSOLVE) בתיבת השיח של Solve.

ד. מן הנקודה Q:= [4,0] העבירו משיקים לפרבולות המוגדרות ע"י $y^2 = -6x$ ו- $y^2 = -10x$.
סמנו את נקודות המגע בשרטוט.

ה. הוכיחו כי אם מעבירים משיקים מהנקודה Q:= [4,0] למשפחת הפרבולות המוגדרת על-ידי המשוואה $y^2 = -2kx$ $(k > 0)$, השיעור הראשון של נקודות המגע הוא קבוע.

ו. דרך המוקד של פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ עובר ישר החותך אותה בשתי נקודות $(x1, y1)$, $(x2, y2)$. (זה הסימון המתמטי הקלאסי , בניגוד לסימון עם [,] שהוא הסימון של Derive.)

הוכיחו כי $x1\cdot x2 = p^2/4$ ו- $y1\cdot y2 = -p^2$

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name5.3.dfw

פעילות 5.4 – זוגות מיוחדים של משיקים לפרבולה

א. מצאו את משוואת הפרבולה אשר המוקד שלה $F:=[2, 0]$ והמדריך $L:= x = -2$.
השאלות ב- ה להלן מתייחסות לפרבולה זו.

ב. דרך הנקודה $A:=[\_\_\ , 8]$ שעל הפרבולה והמוקד של הפרבולה עובר מיתר.
מהי משוואת הישר העובר דרך A ו- F?
מהם השיעורים של קצהו השני B של המיתר?
שרטטו את הפרבולה ואת המיתר.

ג. הראו כי המשיקים לפרבולה הנתונה בשני קצות המיתר מאונכים זה לזה.
באיזו נקודה נחתכים המשיקים? סמנו אותה.

ד. מיתר העובר דרך המוקד של הפרבולה הנתונה נמצא על ישר שמשוואתו $y = k\cdot (x-2)$ $(k\neq0)$.
בדקו אם התכונות שמצאתם בסעיף ג' מתקיימות לגבי כל מיתר העובר דרך המוקד.
הצעת ייעול: להצבת ביטוי "גדול" במקום משתנה, סמנו את הביטוי והעתיקו אותו בעזרת F3 לתוך תיבת השיח של ההצבה. להעתקת ביטוי בסוגריים השתמשו ב F4.

ה. דרך נקודה על המדריך $(-2, c)$ העבירו זוג משיקים לפרבולה הנתונה.
אלו תכונות מעניינות יש לזוג המשיקים? הוכיחו את טענותיכם.

ו. רשמו משוואות של שני משיקים לפרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$ המאונכים זה לזה.
אלו תכונות מעניינות יש לזוג המשיקים? הוכיחו את טענותיכם.

ז. סיכום: המדריך לפרבולה הוא המקום הגיאומטרי של ....

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name5.4.dfw

פעילות 5.5 – כל הפרבולות דומות לפרבולה הסטנדרטית

א. סעיף זה מהווה תרגיל הכנה לסעיפים הבאים שבהם נראה שהגרפים של כל הפונקציות הריבועיות דומים. לפרבולה הסטנדרטית (שמשוואתה $y = x^2$).
למושג של דמיון בהקשר זה ניתן משמעות מתמטית מדויקת בהמשך.
שרטטו את הגרף המוגדר ע"י המשוואה $x^2 + y^4 = 5$.
הפעילו את פקודת ההצבה (Sub): הציבו 2x במקום x, הציבו 2y במקום y.
שרטטו גם את הגרף המוגדר ע"י המשוואה החדשה. הסבירו כיצד התקבלה "הטלוויזיה" החדשה.
חזרו למשוואה $x^2 + y^4 = 5$.
הציבו x/3 במקום x, הציבו y/3 במקום y. הוסיפו לשרטוט את הגרף של המשוואה.
הוסיפו לשרטוט את הישר שמשוואתו $y = 0.5x$. מהן נקודות החיתוך של הישר עם שלוש הטלוויזיות?
מה המשמעות הגיאומטרית של השרטוטים?

הגדרה: הצבת kx במקום x ו- ky במקום y בו-זמנית מבצעת פעולת דמיון. אם $k < 1$, הפעולה נקראת כווץ רדיאלי ואם $k > 1$, זאת מתיחה רדיאלית.

ב. שרטטו את הפרבולה הסטנדרטית.

הציבו במקום x ו y 2x ו 2y בהתאמה ואשרו כי מתקבלת המשוואה $y = 2x^2$. הוסיפו את הגרף לשרטוט.
הציבו במקום x ו y במשוואה של הפרבולה הסטנדרטית ביטויים כך שיתקבלו המשוואות הבאות:

$$y = \frac{1}{3}x^2 \qquad y = -\frac{1}{2}x^2$$

הוסיפו לשרטוט את הגרפים המוגדרים ע"י המשוואות האלה. הוסיפו את הישרים הנתונים ע"י המשוואות $y = x$ ו- $y = -x$
מהן נקודות החיתוך של הישרים עם ארבע הפרבולות?
הסבירו בעזרת השרטוט מדוע פרבולה שמשוואתה היא $y = ax^2$ יכולה להתקבל מן הפרבולה הסטנדרטית על-ידי העתקת דמיון (מתיחה/כיווץ רדיאלי).

ג. שרטטו את הפרבולה P1 שמשוואתה $y = 2x^2 + 20x + 52$ (התאימו את החלון הגרפי לשרטוט).
הציבו $x - 2$ במקום x, הציבו $y - 1$ במקום *y*. שרטטו את הגרף של הפרבולה החדשה P2.
ההצבה גרמה להזזת הגרף המקורי.
הזיזו את הפרבולה P1 הנתונה (על-ידי הצבה) כך שהקדקוד יזוז לראשית הצירים.
מהי משוואת הפרבולה המוזזת P3? $y =$ __________

איזו הצבה תמתח את הפרבולה האחרונה כך שהיא תכסה את הפרבולה הסטנדרטית? בצעו זאת (הוסיפו את שמות הפרבולות לשרטוט).

ד. איזו הצבה תגרום לכך שפרבולה הנתונה על-ידי המשוואה $y=\frac{x^2}{4}-x-\frac{1}{4}$ תזוז כך שהיא תכסה את הפרבולה הסטנדרטית?

ה. הפעילו העתקת סיבוב (סביב הראשית) אשר תעביר את הפרבולה שמשוואתה $y^2 = 4x$ לפרבולה שמשוואתה מהצורה $y = ax^2$. לשם כך הציבו:

במקום x את $x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+y\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ובמקום y את $y\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

שרטטו את הפרבולה הנתונה ואת תמונת הפרבולה לאחר הסיבוב. מהי משוואתה של הפרבולה שהתקבלה?

ו. "המיתר המוקדי מחפש פרבולה."

נתונות שתי נקודות (1.8,5.6-) A ו- (4.2,2.4-)B. מצאו פרבולה P כך שהקטע AB הוא המיתר המוקדי שלה והקדקוד מימין למיתר המוקדי.

הדרכה:

(i) מהו אורך המיתר המוקדי?

איזו פרבולה בעלת משוואה מהצורה $y = ax^2$ "חופפת" לפרבולה P?

שתי פרבולות חופפות זו לזו אם אחת מתקבלת מן השנייה ע"י רצף פעולות מן הסוגים הזזה, סיבוב, אך לא דמיון כנ"ל אם k שונה מ-1.

(ii) בצעו העתקת סיבוב סביב הראשית של הפרבולה שקדקודה בראשית הצירים.

(iii) מהו ציר הסימטריה של הפרבולה שהתקבלה כאן? מהם שיעורי הקדקוד שלה?

(iv) בצעו העתקת הזזה כך שתתקבל הפרבולה P. מה משוואתה של P? שרטטו.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name5.5.dfw