4. מעגל כללי

מבוא

ביחידה זו נעסוק בצירופים לינאריים של משוואות שני מעגלים. נבחן את המשוואה המתקבלת מחיבור שתי משוואות של מעגלים, וכיצד היא מושפעת מהמצב ההדדי של המעגלים. כאן נשתמש בידע שצברנו על אלומות ישרים לטיפול באלומות של מעגלים. בהמשך נבדוק צירופים לינאריים נוספים של מעגלים, ונבחן את הקשר בין המשוואות המתקבלות לגרפים שהן מייצגות.

עוד ביחידה זו נמצא משוואת משיק למעגל בדרכי פתרון שונות, תוך שימוש בכלים מהגיאומטריה ומהאנליזה, לצד הנוסחאות מהגיאומטריה האנליטית. בעזרת הכלים שנרכשו נוכל גם לבדוק משפטים רלוונטיים מן הגיאומטריה.

בסיום היחידה נשתמש במושג "חזקה של נקודה" לבחינת תכונה מיוחדת של כל הנקודות הנמצאות על ישר החיתוך, הממשי או המדומה, של שני מעגלים.

רשימת הפעילויות:

פעילות 4.1 – שני מעגלים

א. התבוננו במשוואות שני המעגלים, וענו על השאלות הבאות:

$$\#1: \quad x^2 + y^2 = 25$$

$$\#2: \quad (x - 5)^2 + y^2 = 36$$

מהו המרכז ומהו הרדיוס של כל אחד מהמעגלים?

מהו המצב ההדדי בין שני המעגלים?

שרטטו את המעגלים ובדקו את תשובותיכם.

כדי לראות מעגל "עגול" יש לקבוע קנה מידה אחיד לשני הצירים באופן הבא:

Set > Aspect Ratio > Reset > OK

מה דעתכם? אם נחבר לפי אגפים את שתי משוואות המעגלים, האם המשוואה שתתקבל מייצגת גם כן מעגל? בדקו על ידי חישוב ושרטוט.

<u>הצעת ייעול</u>: רשמו בשורת העריכה #1+#2 והקישו **ENTER**.

פשטו את המשוואה שהתקבלה ושרטטו את הגרף שלה . התאימו את מערכת הצירים .

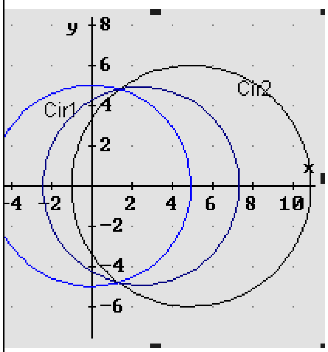
מה, לדעתכם, הקשר בין משוואות המעגלים הנתונים לבין התיאור הגרפי של משוואת הסכום שלהם לפי אגפים?

ב. האם משוואת הסכום לפי אגפים של שתי משוואות מעגלים היא תמיד משוואת מעגל?

בדקו זאת לגבי זוגות המעגלים המופיעים בטבלה על ידי פישוט ושרטוט.

<u>תזכורת</u>: להגדרה ב Derive הקלידו :=

לדוגמה, הגדרת המעגל $\text{Cir1} := x^2 + y^2 = 25$ הגדרת מרכז המעגל $\text{O1} := [0 , 0]$

משוואות המעגלים ומרכזיהם	סכום המשוואות ומרכז המעגל	שרטוט
לדוגמה: $Cir1 := x^2 + y^2 - 25 = 0$ $Cir2 := (x-5)^2 + y^2 - 36 = 0$ $O1 := [0,0]$ $O2 := [5,0]$	לאחר פישוט: $Cir1 + Cir2 =$ $x^2 + y^2 - 5x - 18 = 0$ $O := [2.5,0]$	
$Cir1 := x^2 + y^2 - 4 = 0$ $Cir2 := x^2 + y^2 - 25 = 0$ $O1 := [0,0]$ $O2 := [0,0]$ (1)		
$Cir1 := x^2 + y^2 - 4 = 0$ $Cir2 := (x-2)^2 + (y+1)^2 - 36 = 0$ $O1 := [\_,\_]$ $O2 := [\_,\_]$ (2)		
$Cir1 := (x-1)^2 + (y+3)^2 - 16 = 0$ $Cir2 := (x-4)^2 + (y-4)^2 - 4 = 0$ $O1 := [\_,\_]$ $O2 := [\_,\_]$ (3)		
$Cir1 := (x-4)^2 + y^2 - 4 = 0$ $Cir2 := (x-4)^2 + (y+6)^2 - 16 = 0$ $O1 := [\_,\_]$ $O2 := [\_,\_]$ (4)		
$Cir1 := (x-4)^2 + y^2 - 4 = 0$ $Cir2 := (x-4)^2 + (y-4)^2 - 4 = 0$ $O1 := [\_,\_]$ $O2 := [\_,\_]$ (5)		

מהו הקשר בין השיעורים של מרכזי המעגלים? הסבירו.

הסיקו מסקנות לגבי הקשר בין משוואות המעגלים הנתונים לבין התיאור הגרפי של סכום משוואותיהם לפי אגפים.

ג. הסבירו מדוע משוואת כל מעגל היא מן הצורה: $ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$, $a \neq 0$.

הסבירו מדוע הסכום לפי אגפים של שתי משוואות מעגלים גם הוא מאותה צורה.

נסו לנסח מסקנה על סמך הטבלה: מהו התנאי לכך שמשוואה מן הצורה $ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$, $a \neq 0$ אכן מייצגת מעגל? מהי המשמעות הגרפית ומהי המשמעות האלגברית של התנאי?

ד. מה מתקבל מחיסור לפי אגפים של שתי משוואות המעגלים המופיעות בסעיף ב'? הסבירו.

בדקו מה מתקבל מחיסור לפי אגפים של שתי משוואות מעגלים לגבי הזוגות הנתונים בטבלה.

(שימו לב: בכל משוואות המעגלים שבהם עסקנו המקדם a הוא 1.)

בדקו מה מתקבל מחיסור לפי אגפים של שתי המשוואות: $\begin{matrix} 2x^2+2y^2=50 \\ (x-5)^2+y^2=36 \end{matrix}$?

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name4.1.dfw

פעילות 4.2 – אלומת מעגלים

א. בפעילות הקודמת שרטטנו שני מעגלים נחתכים, המיוצגים על-ידי המשוואות:

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$(x-5)^2 + y^2 = 36$$

שרטטו שוב את המעגלים, ומצאו את נקודות החיתוך שלהם.

כתבו צירוף לינארי של משוואות שני המעגלים, ושרטטו את הגרף שלו. תארו במילים מה קיבלתם.

לשרטוט גרפים של ביטויים מבלי לפשטם, בחרו בחלון הגרפי: Options > Simplify Before Plotting

נסו צירופים לינאריים נוספים.

נוח יותר לצורך חישובים להשתמש במשוואות המעגלים כשהן כתובות בצורה:

$$Cir1 := x^2 + y^2 - 25 = 0$$
$$Cir2 := (x-5)^2 + y^2 - 36 = 0$$

כמה מעגלים שונים ניתן להעביר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים הנתונים?

מה משותף למרכזי המעגלים המתקבלים על ידי צירוף לינארי?

ב. משפחת המעגלים העוברים דרך שתי נקודות נתונות היא **אלומת מעגלים עם נקודות בסיס**.

משוואת האלומה היא הצירוף הלינארי הכללי (עם שני פרמטרים) של משוואות שני המעגלים:

$s \cdot Cir1 + t \cdot Cir2$, כאשר לפחות אחד מבין s ו t שונה מאפס.

הראו כי כל מעגל המיוצג על ידי המשוואה: $s \cdot Cir1 + t \cdot Cir2$ אכן עובר דרך שתי נקודות החיתוך של שני המעגלים .

עבור אלו ערכים של s ו t יתקבלו ממשוואת האלומה משוואות המעגלים המקוריים?

האם משוואת האלומה מייצגת רק מעגלים?

ג. נרשום משוואה חד- פרמטרית (בעזרת הפרמטר r) לאלומת המעגלים:

$$Cir1 + r \cdot Cir2$$

האם המשוואה החד- פרמטרית מכילה את כל המעגלים מהאלומה?

עתה נבנה ייצוג חד-פרמטרי כך שגם Cir1 וגם Cir2 יתקבלו.

בהנחה כי $s + t \neq 0$ נחלק את המשוואה ב $s + t$: $\frac{s}{s+t} \cdot Cir1 + \frac{t}{s+t} \cdot Cir2$

נסמן: $\frac{s}{s+t} = k$ ואז: $\frac{t}{s+t} = 1 - k$

המשוואה החד-פרמטרית היא אם כך:

$$k \cdot (x^2 + y^2 - 25 = 0) + (1-k) \cdot ((x-5)^2 + y^2 - 36 = 0)$$

שרטטו את האלומה, ואשרו שהיא אכן מייצגת גם את שני המעגלים המקוריים.

נקו את המסך ושרטטו מחדש את שני המעגלים המקוריים. הוסיפו בצבע אחר את המעגלים המיוצגים על ידי האלומה. השרטוט החדש מכסה את הקודם; המעגלים הנתונים כוסו על ידי שני מעגלים השייכים לאלומה.

<u>תזכורת</u>: לשרטוט משפחה היעזרו בפקודה VECTOR:

$$\text{VECTOR}(k\cdot(x^2 + y^2 - 25 = 0) + (1 - k)\cdot((x - 5)^2 + y^2 - 36 = 0),\ k,\ -10,\ 10)$$

הסבר: (ערך אחרון, ערך ראשון, משתנה, משוואת האלומה) VECTOR

לשרטוט: בתפריט Options בחלון הגרפי הפעילו Simplify Before Plotting, ובטלו את החלפת הצבע האוטומטי Change Plot Color . בתפריט Display בחרו בצבע שרטוט אפור.

ד. שרטטו שוב את שני המעגלים הנתונים על-ידי Cir1, Cir2 (ציר ה-x הוא ישר המרכזים של האלומה המתקבלת משרטוט שתי המשוואות).

מצאו ערך של k , כך שיתקבל מעגל שמרכזו בנקודה M:=[2 , 0].

מצאו ערך של k , כך שיתקבל מעגל שמרכזו בנקודה N:=[-1 , 0].

מהם ערכי k שלהם מתאימים מעגלים מן האלומה שמרכזיהם בנקודות שעל ישר המרכזים Q:=[q , 0] ?

מהם ערכי q שלהם מתאימים המעגלים מהאלומה עבור k = 2 , k = -1 , k = 0.4 ?

תחילה הגדירו למחשב את המשתנה q:=

בדקו תשובותיכם על ידי שרטוט.

לשרטוט נקודה, הקלידו את שיעוריה בסוגריים מרובעים והקישו  . תוכלו לבחור את גודל הנקודה על הצג, בחרו בחלון הגרפי: Options >Display> Points >

קטע המרכזים הוא הקטע המחבר את מרכזי שני המעגלים: [0 , 5] ו- [0 , 0] .

הסבירו כיצד משפיע ערכו של *k* על מיקומה של הנקודה לגבי קטע המרכזים?

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name4.2.dfw

פעילות 4.3 – עוד אלומת מעגלים

א. שרטטו את שני המעגלים:

$$Cir1 := (x-5)^2 + y^2 - 9 = 0$$
$$Cir2 := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

בשרטוט אנו רואים שהמעגלים אינם נחתכים, כלומר: אין נקודות משותפות לשני המעגלים. לכן, אם נבקש מהתוכנה לפתור את מערכת המשוואות של שני המעגלים :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \wedge (x-5)^2 + y^2 - 9 = 0$$

נצפה לקבל פתרונות לא ממשיים. ואמנם קיבלנו שני פתרונות מרוכבים, שבהם השיעור הראשון מספר ממשי והשיעור השני מספר מרוכב. בסעיפים הבאים נברר את משמעותם בהקשר עם אלומת מעגלים שנבנה בעזרת שני המעגלים הנתונים.

ב. כתבו משוואה חד- פרמטרית של הצירוף הלינארי של משוואות שני המעגלים הנתונים:

$k \cdot Cir1 + (1-k) \cdot Cir2$, ושרטטו שני מעגלים המיוצגים על ידי המשוואה.

הסבירו את מה שקיבלתם.

האם משוואות המעגלים המוגדרים על-ידי Cir1, Cir2 נכללות באלומה שהגדרתם?

תנו דוגמאות למשוואות מתוך האלומה שאינן מייצגות מעגל.

הסבירו מדוע חיסור לפי אגפים של משוואות שני המעגלים, שגם הוא צירוף לינארי של משוואות שני המעגלים, אינו מוכל באלומה שהגדרתם. שרטטו את הגרף המתאים לצירוף לינארי זה.

שרטטו מעגלים נוספים מן האלומה שהגדרתם בעזרת הפקודה vector.

לשרטוט משפחה של מעגלים היעזרו בפקודה VECTOR:

Vector (k·Cir1 + (1-k)·Cir2 , k , -10 , 10 ,0.3)

הקטינו את גודל הצעד. מה קיבלתם? הסבירו.

ג. הראו כי כל מרכזי המעגלים המיוצגים על ידי האלומה, נמצאים על ישר המרכזים של שני המעגלים המקוריים.

בדקו אם כל נקודה על ישר המרכזים יכולה להיות מרכז של מעגל המיוצג על ידי האלומה. לשם כך,פשטו את משוואת האלומה, ומצאו מהו התנאי לכך שהמשוואה תייצג מעגל.

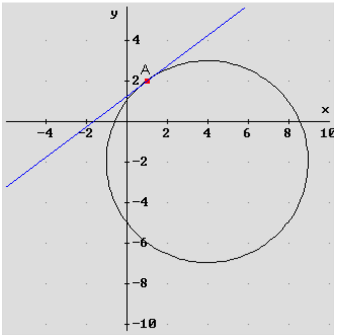
נסחו את מסקנתכם. בדקו אם השרטוטים שקיבלתם קודם תואמים למסקנתכם.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name4.3.dfw

פעילות 4.4 - משיק למעגל

א. נתון מעגל שמשוואתו: $(x-4)^2+(y+2)^2-25=0$.

דרך הנקודה $A(1,2)$ שעל המעגל העבירו משיק למעגל (ראו שרטוט):



מצאו, ללא עזרת המחשב, את משוואתו של המשיק למעגל, באחת (או בכמה) מהדרכים הבאות.
לבדיקת תשובותיכם תוכלו להיעזר במחשב:

1) היעזרו במשפט: הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.

מצאו את שיפוע הרדיוס OA , את שיפוע האנך לו, ואת משוואת המשיק.

2) כתבו מערכת משוואות למציאת נקודות המפגש בין המעגל לבין ישר כלשהו העובר דרך נקודה A .

מצאו את הישר המשיק למעגל, כלומר: ישר שעבורו יהיה למערכת פיתרון יחיד.

3) היעזרו בנוסחה לחישוב מרחק בין נקודה לישר, ובדקו מתי המרחק ממרכז המעגל אל הישר העובר דרך A לבין מרכז המעגל שווה לרדיוס.

4) הסתכלו על חצי המעגל העליון, זהו גרף של פונקציה f.

הראו כי: $f(x)=\sqrt{-x^2+8x+9}-2$, גזרו את הפונקציה ומצאו את משוואת המשיק בנקודה A.

5) היעזרו בנגזרת של פונקציה סתומה למציאת שיפוע המשיק בנקודה A ומשוואת המשיק.

ניתן, כמובן, לקבל את משוואת המשיק של פונקציה סתומה ישירות בעזרת התוכנה. למציאת משוואת המשיק למעגל, הקלידו:

```
IMP_TANGENT((x - 4)^2 + (y + 2)^2 - 25, x, y, 1, 2)
```

הסבר ההוראה (משמאל לימין): IMP_TANGENT – מציאת משוואת משיק (Tangent) לפונקציה סתומה (Implicit). בתוך הסוגריים: האגף השמאלי של המשוואה הכתובה בצורה u = 0, ואחריו x, y, ושיעור ה- x של נקודת ההשקה, ושיעור ה- y של נקודת ההשקה.

ב. בחרו כרצונכם נקודה Q מחוץ למעגל. מצאו את משוואות המשיקים למעגל העוברים בנקודה זו.

בדקו את תשובתכם על ידי שרטוט המשיקים.

ג. חשבו את הזווית שבין שני המשיקים שמצאתם.

תזכורת: הזווית α שבין הישרים שמשוואותיהם: $\begin{array}{l} y=m_1x+n_1 \\ y=m_2x+n_2 \end{array}$, מקיימת: $\mathrm{tg}\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$

ד. שרטטו ישר, כרצונכם, העובר דרך הנקודה Q שבחרתם, וחותך את המעגל הנתון.

נכנה את המרחק בין הנקודה מחוץ למעגל שהמשיק עובר דרכה, לבין נקודת ההשקה **אורך המשיק**.

סמנו את הנקודות שבהן הישר חותך את המעגל באותיות M ו- N, ואת אחת מנקודות ההשקה באות T. חשבו את אורכי הקטעים שהתקבלו, והראו כי: $QM\cdot QN=QT^2$

מה המשמעות של תוצאה זו? הראו תוך שימוש בסימונים הקודמים, כי בכל מעגל שמרכזו O ורדיוסו *r* מתקיים: $QM\cdot QN=\left|Q-O\right|^2-r^2$

ההפרש בין ריבוע מרחקה של הנקודה Q ממרכז המעגל (O), לבין ריבוע הרדיוס של המעגל (*r*), נקרא: ה**"חזקה של נקודה"** לגבי המעגל.

$$\mathrm{Power}(Q,O,r)=|Q-O|^2-r^2$$

הראו כי ריבוע אורכו של המשיק למעגל שווה ל"חזקה של הנקודה Q" לגבי המעגל הנתון.

לנוחותכם תוכלו להגדיר למחשב את פונקציית החזקה של נקודה, ולהיעזר בה בחישוביכם:

$$\mathrm{Power}(Q,O,r):=|Q-O|^2-r^2$$

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name4.4.dfw

פעילות 4.5 – ישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני מעגלים

א. לפניכם משוואות שני מעגלים נחתכים שעסקנו בהם בפעילות 4.2. נכנה את הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים **ישר החיתוך.** שרטטו את שני המעגלים ואת ישר החיתוך שלהם.

$$\#1: \quad x^2 + y^2 = 25$$

$$\#2: \quad (x-5)^2 + y^2 = 36$$

בחרו, כרצונכם, נקודה מחוץ למעגלים הנמצאת על ישר החיתוך. היעזרו בהגדרה של "חזקה של נקודה" לחישוב אורכי המשיקים למעגלים הנתונים היוצאים מהנקודה שבחרתם, מבלי לחשב את משוואות המשיקים?

כמו בפעילות קודמת, נכנה את המרחק מנקודת המוצא של המשיק לנקודת ההשקה, **אורך המשיק**. חשבו את אורכי המשיקים. מה קיבלתם?

מה תוכלו לומר על ה"חזקה של הנקודה" שבחרתם לגבי כל אחד מן המעגלים?

תזכורת: את "החזקה של נקודה Q" הגדרנו ב Derive כך: $\text{Power}(Q,O,r) := |Q-O|^2 - r^2$

(O – מרכז המעגל, r – רדיוס המעגל)

בחרו נקודה נוספת וחזרו על התהליך.

ב. בחרו, כרצונכם, נקודה הנמצאת על ישר החיתוך בתוך המעגלים.
חשבו את ה"חזקה של הנקודה" לגבי כל אחד מן המעגלים. מה קיבלתם?
בדקו אם התופעה חוזרת על עצמה גם לגבי נקודות אחרות על ישר החיתוך.

ג. הגדירו נקודה כללית על ישר החיתוך, והראו כי לכל נקודה על ישר החיתוך אותה "חזקה" לגבי שני המעגלים.
הסבירו כיצד משפיע מיקומה של הנקודה על ישר החיתוך על ה"חזקה" של הנקודה?

ד. לפניכם משוואות שני מעגלים שאינם נחתכים, שעסקנו בהם בפעילות 4.3. נכנה את הישר המייצג את החלק המדומה של פיתרון מערכת המשוואות של שני המעגלים: **ישר החיתוך המדומה.** שרטטו את שני המעגלים ואת ישר החיתוך המדומה שלהם: $x = 1.7$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$(x-5)^2 + y^2 - 9 = 0$$

בחרו נקודה על הישר, כרצונכם. חשבו את ה"חזקה" של הנקודה לגבי כל אחד מן המעגלים. מה קיבלתם?
בחרו נקודות נוספות על הישר וחזרו על התהליך.

ה. הראו שהכלל שהוכחתם בסעיף ג' לגבי נקודות על ישר החיתוך הממשי של מעגלים נחתכים, מתקיים גם לגבי נקודות על ישר החיתוך המדומה של שני מעגלים שאינם נחתכים.

ו. הציעו שיטה נוספת לבניית משיק למעגל בנקודה שעליו המתבססת על מה שלמדתם ביחידה זו.

ז. חקרו באופן דומה את שני המעגלים בדוגמה (2) בפעילות 4.1:

$$Cir1 := (x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 36 = 0$$

$$Cir2 := x^2 + y^2 - 4 = 0$$

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name4.5.dfw