



3. קווים ישרים

מבוא

משפחה של ישרים בעלי תכונה גיאומטרית משותפת מיוצגת על-ידי משוואה פרמטרית. ביחידה זו נעסוק במשפחות של ישרים בעלי נקודה אחת משותפת לכולם ונציג כל אחת מהן כאלומה של ישרים העוברים דרך נקודת החיתוך של שני ישרים נתונים. נבנה ייצוגים שונים לאלומה בעזרת משוואות עם שני פרמטרים או עם פרמטר אחד. נקשר את הנלמד למושג הצירוף הלינארי, לחישוב המרחק מנקודה לישר ולתכונת חוצה זווית כמקום גיאומטרי. בד בבד נכין את הרקע לטיפול באלומה של מעגלים, שנעסוק בה ביחידה הבאה.

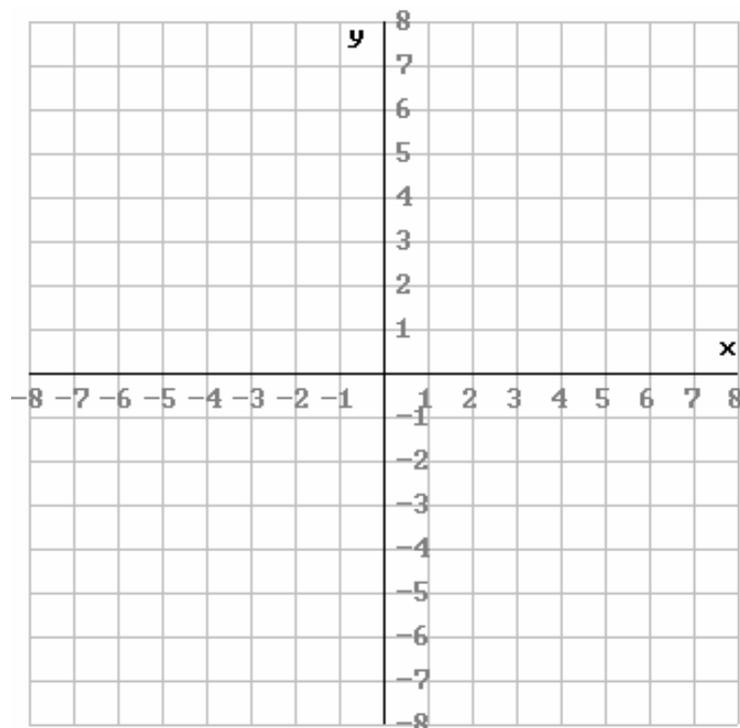
רשימת הפעילויות:

- פעילות 3.1 – משפחה שכזאת
- פעילות 3.2 – אלומה של ישרים
- פעילות 3.3 – ייצוג נוסף לאלומה
- פעילות 3.4 – חוצי זוויות

פעילות 3.1 – משפחה שכזאת

א. נתונה משפחת ישרים על-ידי המשוואה $ax + by - (2a + 3b) = 0$ (לפחות אחד מבין a, b שונה מאפס). הציבו לפי הטבלה ערכים שונים עבור a, b כדי לקבל דוגמאות למשוואות של ישרים השייכים למשפחה הנתונה. שרטטו גרף מתאים לכל משוואה. מה המיוחד לישרים במשפחה זו? ממה, לדעתכם, נובעת התכונה המיוחדת?

המשוואה	$a = \underline{\quad}$	$b = \underline{\quad}$	
	4	5	1
	-3	7	2
$5x + \underline{\quad}y - \underline{\quad} = 0$		-3	3
$\underline{\quad}x + \underline{\quad}y - 13 = 0$			4
$x = 2$			5
			6
			7



ב. הראו כי הפתרון של כל מערכת שתי משוואות השייכות למשפחה הוא מערכת של שתי משוואות $[x = _, y = _]$ (השלימו) השייכות למשפחה.

הראו כי כל צירוף לינארי (לפי אגפים) של שתי המשוואות $[x = _, y = _]$ גם הוא שייך למשפחה הנתונה.

ג. הראו כי כל משוואת ישר העובר דרך הנקודה ששיעוריה $(3, -5)$ היא מהצורה

$$ax + by - (3a - 5b) = 0$$

ד. בחרו נקודה במערכת הצירים, ומצאו משוואה פרמטרית המגדירה משפחה של ישרים העוברים דרך הנקודה.

ה. הסבירו מדוע המשוואה הדו-פרמטרית $a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$ (לפחות אחד מבין a, b שונה מאפס) מייצגת ישרים העוברים דרך הנקודה ששיעוריה x_1, y_1 .

ו. הסבירו מדוע המשוואה החד-פרמטרית $y - y_1 = m(x - x_1)$ מייצגת ישרים העוברים דרך הנקודה ששיעוריה x_1, y_1 .

האם כל הישרים העוברים דרך הנקודה מתקבלים על-ידי המשוואה?

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name3.1.dfw

פעילות 3.2 – אלומה של ישרים

א. הגדירו ב- Derive שני ישרים ושרטטו אותם: $L1:= x + 3y + 2 = 0$ $L2:= x - 2y - 4 = 0$
 בדקו בשרטוט כי הישרים $L3$, $L4$ המוגדרים על-ידי צירוף לינארי של המשוואות המגדירות את
 הישרים $L1$, $L2$ עוברים דרך נקודת החיתוך של $L1$, $L2$
 $L3:= L1 + L2$

לפישוט הביטוי הקישו **=** (Simplify)
 או לפתיחת סוגריים: (Ctrl+E) Simplify > Expand

$$L4:= 8 \cdot L1 - 12.5 \cdot L2$$

ב. כמו בפעילות 3.1 הראו כי הגרף של $L:= s \cdot L1 + t \cdot L2$ (כאשר לפחות אחד מבין t ו- s שונה מאפס) הוא ישר העובר דרך נקודת החיתוך של $L1$ עם $L2$, כלומר
 $s(x + 3y + 2) + t(x - 2y - 4) = 0$
 ג. הראו כי כל ישר העובר דרך נקודת החיתוך של $L1$ עם $L2$ ניתן לייצוג על-ידי משוואה מהצורה
 $s \cdot L1 + t \cdot L2$.

משפחה של ישרים אשר לכלם יש נקודה משותפת נקראת **אלומה של ישרים**.

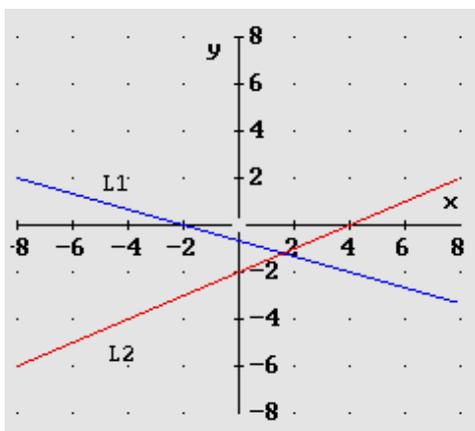
ניתן לייצג אלומה של ישרים בעזרת משוואה חד-פרמטרית. המשוואה המתארת את המשפחה שייצרנו בעזרת הישרים $L1$, $L2$ היא: $s(x + 3y + 2) + t(x - 2y - 4) = 0$, בהנחה כי $s \neq 0$ נחלק את המשוואה ב- s ונסמן $r = t/s$. המשוואה המתקבלת היא:

$$x + 3y + 2 + r(x - 2y - 4) = 0$$

העבירו את השרטוט מהחלון הגרפי לחלון האלגברי: מתפריט File (בחלון הגרפי) בחרו Embed.
 נקו את החלון הגרפי (Delete).

ד. שרטטו שוב את שני הישרים הנתונים והוסיפו לשרטוט את אלומת הישרים המתקבלים בעזרת ההוראה:

$$\text{VECTOR}(x + 3 \cdot y + 2 + r \cdot (x - 2 \cdot y - 4) = 0, r, -5, 5, 0.5)$$



הסבר: (גודל הצעד, ערך אחרון, ערך

ראשון, משתנה, משוואת האלומה) VECTOR

הדרכה לשרטוט: בתפריט Options בחלון הגרפי

הפעילו Simplify Before Plotting,

בטל את החלפת הצבע האוטומטי

Change Plot Color בתפריט Display,

בחרו בצבע שרטוט אפור.

ה. האם ניתן לכסות את שני הישרים הנתונים ע"י המשפחה

$$x + 3y + 2 + r(x - 2y - 4) = 0 ?$$

הוסיפו לשרטוט ישרים על-ידי הקטנת גודל הצעד בהוראה vector.
שימו לב, כל שרטוט מחדש "מכסה" את הקווים ששרטטו קודם.

ו. נסו למצוא ערך של r כך שהישר המתאים יהיה חוצה הזווית שבין שני הישרים.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name3.2.dfw

פעילות 3.3 – ייצוג נוסף לאלומה

נתונים שני ישרים הנחתכים בנקודה P $[L1:= 7x - 15y + 20 = 0, L2:= x + 10y - 15 = 0]$

המשוואה $s(7x - 15y + 20) + t(x + 10y - 15) = 0$ מייצגת אלומה של ישרים העוברים דרך P. נבנה ייצוג חד-פרמטרי כך שגם L1 וגם L2 יתקבלו.

$$\frac{s}{s+t}L1 + \frac{t}{s+t}L2 \quad \text{בהנחה כי } s+t \neq 0 \text{ נחלק את המשוואה ב } s+t$$

$$\text{נסמן: } \frac{s}{s+t} = k \quad \text{ואז } \frac{t}{s+t} = 1-k$$

$$k(7x - 15y + 20) + (1-k)(x + 10y - 15) = 0 \quad \text{המשוואה החד-פרמטרית היא אם כך:}$$

א. מהם ערכי k שעבורם מתקבלים מהמשוואה הישרים L1, L2 ?

ב. הוכיחו כי עבור כל ערך של k המשוואה מייצגת ישר העובר גם הוא דרך הנקודה P.

ג. מצאו את משוואות הישרים העוברים דרך נקודת החיתוך של הישרים הנתונים ומקבילים לצירי

$$\text{השיעורים: } x = \underline{\quad} \quad y = \underline{\quad}$$

מהו הערך של k שעבורו מתקבל מהמשוואה החד-פרמטרית הישר שמשוואתו $x = \underline{\quad}$,

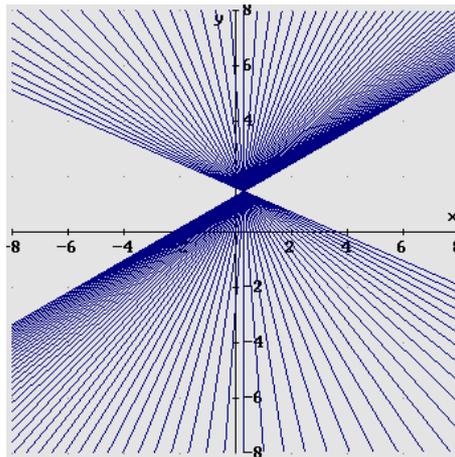
או משוואה שקולה לה?

נסו למצוא ערך של k שעבורו מתקבל מהמשוואה הישר העובר דרך נקודת החיתוך של הישרים

הנתונים ומקביל לציר x.

ד. השלימו את ההוראה הבאה כדי שיתקבל שרטוט כמו זה שלפניכם:

$$\text{VECTOR}(k \cdot (7 \cdot x - 15 \cdot y + 20) + (1 - k) \cdot (x + 10 \cdot y - 15) = 0, k, ?, ?, ?)$$



ה. בדקו בשרטוט כי הישר המיוצג על-ידי $6x - 25y + 35 = 0$ עובר דרך נקודת החיתוך של הישרים הנתונים.

האם קיים ערך של k שעבורו מתקבל משוואת ישר זה, או משוואה שקולה לה, ממשוואת

האלומה? מה משמעות תשובתכם ומה ההסבר?

$$\text{הדרכה: התבוננו בהצגה החד-פרמטרית } s(7x - 15y + 20) + t(x + 10y - 15) = 0$$

- ו. מצאו את ערכי k שעבורם מתקבל ישר העובר דרך הנקודה P ומרחקה של ראשית הצירים אליו שווה ל-1. הדגימו תשובתכם בשרטוט.
- ז. תארו גרפית את הקשר בין k לבין מרחקה של הראשית אל הישר, d .
מהו ערכו של k שעבורו מתקבל ישר העובר דרך ראשית הצירים?
מהו ערכו של k שעבורו מתקבל הישר בעל המרחק המכסימלי מראשית הצירים?

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name3.3.dfw

פעילות 3.4 – חוצי זוויות

א. כיצד, לדעתכם, ייראה הגרף של המשוואה:

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5x - 10y - 12 = 0$$

בדקו על-ידי שרטוט והסבירו את הקשר בין המשוואה לבין הגרף.

ב. הראו כי הישרים ששרטטו ניצבים זה לזה ומצאו את נקודת החיתוך שלהם.

(סמנו אותם L1 L2)

ג. הוסיפו לשרטוט את חוצי הזוויות שנוצרו על-ידי הישרים. (סמנו אותם L3 L4)

אפשר להיעזר בנוסחת המרחק מנקודה אל ישר כדי למצוא את משוואות חוצי הזוויות (ראו פעילות 3.2)

ד. הוסיפו לשרטוט את חוצי כל הזוויות בשרטוט שקיבלתם בסעיף ג'.

ה. ארגנו את כל משוואות הישרים ברשימה: [L1, L2, ..].

שרטטו את כולם בצבע אחד – בתפריט Options בטלו את המצב Change Plot Color.

הזיזו את האלומה על-ידי הצבת $x - 2$ במקום x , ו- $y + 3$ במקום y .

הסבירו מה רואים על המסך.

שרטטו את האלומה המוזזת בצבע אחד – שונה מהקודם.

לביצוע ההצבה האירו את הרשימה והפעילו את הפקודה S_{UB}

ו. הזיזו את האלומה כך שהנקודה המשותפת תימצא בראשית הצירים.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name3.4.dfw