



2. מרחק נקודה אל ישר

מבוא

ביחידה זו נגדיר משוואת ישר כמקום הגיאומטרי של כל הנקודות ששיפוע הקטע המחבר אותן עם אחת משתי נקודות נתונות, שווה לשיפוע הקטע המחבר את שתי הנקודות הנתונות. ננצל את אפשרויות התכנות של התוכנה להגדרת פונקציית שיפוע, פונקציית ישר ופונקציית מרחק נקודה אל ישר. בכך נעמיק את הבנת המושגים הגיאומטריים היוצרים את הנוסחות המוכרות. עוד ביחידה זו: נבחן את המצב ההדדי בין שני ישרים, נבצע הזזות של ישרים ונקבע הסכם לגבי סימנו של 'המרחק המכוון' של נקודה אל ישר נתון.

רשימת הפעילויות:

פעילות 2.1 – משוואת ישר לפי שתי נקודות

פעילות 2.2 – מצב הדדי בין שני ישרים

פעילות 2.3 – מרחק מנקודה לישר

פעילות 2.4 – שאלות

פעילות 2.1 – משוואת ישר לפי שתי נקודות

א. קצות הקטע AB הם: $A=[4, 5]$, $B=[8, 6]$.

מהו המקום הגיאומטרי של כל הנקודות $P=[x, y]$ שעבורן שיפוע הקטע AB שווה לשיפוע הקטע

$$AP? \text{ היעזרו בפונקציה לחישוב שיפוע: } \text{SLOPE}(P, Q) := \frac{P \downarrow 2 - Q \downarrow 2}{P \downarrow 1 - Q \downarrow 1}$$

תזכורת: $P \downarrow 1$ נותן את שיעור ה- x של נקודה P ; $P \downarrow 2$ נותן את שיעור ה- x של נקודה P .

כתבו את השוויון המייצג את התנאי, ושרטטו אותו.

התאימו את מערכת הצירים בעזרת מקשי החיצים בסרגל הכלים של החלון הגרפי הסבירו מה קיבלתם.

ב. בחרו שתי נקודות A , B כרצונכם ומצאו את משוואת הישר העובר דרכן.

רשמו את המשוואה ובדקו את תשובתכם בעזרת שרטוט במערכת צירים.

משוואת ישר לפי שתי נקודות

למציאת משוואת ישר (שאינו מקביל לציר y) לפי שתי נקודות A ו- B שעליו, נגדיר לתוכנה את הפונקציה: $\text{LINE}(A, B)$ על-ידי שוויון בין שיפוע הקטע AB לשיפוע הקטע שבין הנקודה A לנקודה כללית כלשהי $P=[x, y]$ שעליו.

הקלידו: $\text{LINE}(A, B) := \text{SLOPE}(A, B) = \text{SLOPE}(A, P)$

התאימו את מערכת הצירים על-ידי מרכז החלון לפי הסמן 

ג. נתונות שתי נקודות כלליות A ו- B .

כדי להשתמש בנקודות כלליות, הגדירו אותן באופן הבא. הקלידו: $A:=$, $B:=$

מצאו בעזרת הפונקציה $\text{LINE}(A, B)$ את משוואת הישר העובר דרכן.

עתה מצאו הצגה של ישר זה בצורה $y = mx + n$.

הדרכה: כדי להביע את הפרמטר m בעזרת שיעורי הנקודות A ו- B , הציבו 0 במקום x במשוואה

שמצאתם.

תזכורת: להצבה בחרו SUB בסרגל הכלים של החלון האלגברי.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name2.1.dfw

פעילות 2.2 – מצב הדדי בין ישרים

א. נתון הישר שמשוואתו: $y = 2x + 8$. הישר שמשוואתו $y = 0.5x + 13$ מאונך ישר הנתון. מהם שיעורי נקודת החיתוך של שני הישרים? שרטטו את שני הישרים וסמנו את נקודת החיתוך.

תזכורת: הקליקו  להתאמת מערכת הצירים בחלון הגרפי.

ב. הזיזו את הישר הנתון ($y = 2x + 8$) שש יחידות ימינה ושלוש יחידות כלפי מטה האירו את משוואת הישר, והציבו בה בעזרת הפקודה SUB: $x = x - 2$, $y = y + 9$. שרטטו את הישר המוזז.

מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של הישר המוזז עם הישר שבניתם בסעיף א וסמנו אותה בשרטוט. מה הקשר בין שיעורי שתי נקודות החיתוך?

פתרון מערכת משוואות בשני נעלמים

לפתרון מערכת משוואות רשמו בשורת העריכה את שתי המשוואות וביניהן את הסימן "וגם" \wedge . תמצאו את הסימן בסרגל הסימנים בתחתית המסך. הקישו  (SOLVE) והאירו את x ו y בחלון שנפתח. הציעו הזזות נוספות שיזיזו את הישר הנתון לישר המוזז שקיבלתם.

ג. צבעו את השטח הכלוא בין הישר הנתון והישר המוזז.

כתבו מערכת אי שוויונים המייצגת את השטח הכלוא בין הישרים: $[y < 2x + 8 \wedge y > \text{_____}]$

והקישו  לצביעת השטח.

ד. כתבו משוואות ארבעה ישרים היוצרים טרפז כזה:

רשמו מערכת אי-שוויונים מתאימה וצבעו את הטרפז.

ה. הזיזו את הטרפז שש יחידות ימינה.

הקלידו את כל ארבעה האי-שוויונים בתוך סוגריים מרובעים, עם הסימן \wedge ("וגם") בין אחד לשני. האירו את מערכת האי-שוויונים, והציבו בה בעזרת הפקודה SUB: $x = x - 6$.

שרטטו  את הטרפז המוזז בבת אחת.

עתה הזיזו את הטרפז חמש יחידות כלפי מטה. בצעו הזזות נוספות.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name2.2.dfw

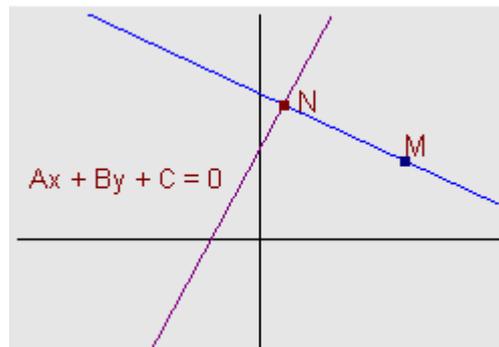
פעילות 2.3 – מרחק מנקודה אל ישר

לפניכם משוואה כללית של הישר: $Ax + By + C = 0$ (כאן כלולים גם ישרים מקבילים לציר y). הנקודה M אינה על הישר.

ברצוננו למצוא נוסחה לחישוב המרחק, d , מהנקודה לישר.

נוריד אנך (נורמל) מן הנקודה M לישר $Ax + By + C = 0$.

האנך חותך את הישר בנקודה N , כמו בציור:



א. הביעו על ידי A , B ו- C את משוואת האנך ואת שיעורי נקודת החיתוך, N .

תחילה הגדירו למחשב את המשתנים, הקלידו:

$[A :=, B :=, C :=, m1 :=, m2 :=]$

$M := [m1, m2]$

כתבו נוסחה לחישוב המרחק ($d = MN$) מהנקודה M לישר:

הגדירו למחשב פונקציית מרחק מנקודה M לישר שמשוואתו $Ax + By + C = 0$:

הקלידו: $d(A,B,C,m1,m2) :=$ _____

ב. נתונים הישר שמשוואתו $0.8x + 0.6y + 2 = 0$ והנקודות: $A(3, 2)$, $B(-3, -3)$, $C(0, 0)$.

חשבו בעזרת הפונקציה שהגדרתם את המרחק d מכל אחת מן הנקודות הנתונות אל הישר.

להצגת התוצאה כשבר עשרוני האירו את הביטוי ובחרו בסרגל \approx הפקודות של החלון האלגברי

או עברו לכתוב עשרוני Notation:= Decimal

ג. נתון הישר: $-3x + 4y - 15 = 0$. מצאו את המרחק מראשית הצירים אל הישר.

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad \text{צורה נורמלית של משוואת ישר היא:}$$

המרחק מראשית הצירים אל הישר שווה ל- $|C|$.

ד. אם נשמיט את סימן הערך המוחלט מנוסחת חישוב המרחק מנקודה לישר נקבל **מרחק מכוון**

$$dd(A, B, C, m1, m2) := \frac{A \cdot m1 + B \cdot m2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad :(\text{נסמו } dd)$$

שרטטו את הישר שמשוואתו: $-5x + 12y + 9 = 0$.

מיינו את הנקודות המוגדרות להלן לפי הסימן של מרחקן המכוון אל הישר הנתון:

$$D := [5, 5] \quad E := [-2, 8] \quad F := [5, -3] \quad O := [0, 0]$$

הישר ששרטטתם מחלק את המישור לשני אזורים. צבעו את האזור הכולל את הראשית.

הקלידו: $-5x + 12y + 9 > 0$ והקישו  לצביעה.

הסבירו כיצד מיקומן של הנקודות מתבטא בתוצאת החישוב של מרחקן המכוון אל הישר הנתון.

ה. שרטטו את הישר שמשוואתו: $x + y - 4 = 0$.

מיינו את הנקודות D, E, F, O לפי הסימן של מרחקן מישר זה.

בדוגמאות שבדקתם ראיתם כי המרחק המכוון אל ישר של נקודות הנמצאות באותו חצי מישור לגבי הישר – הוא בעל אותו סימן. קל למצוא את המרחק המכוון של ראשית הציירים אל הישר (סימנו כסימן C). נסכים, אם כך, לקבוע כי הסימן של מרחק אל ישר של נקודה הנמצאת באותו חצי מישור לגבי הישר כמו הראשית – זהה לסימן של המרחק המכוון של הראשית אל הישר.

ו. שרטטו שוב את הישרים שמשוואותיהם: $-5x + 12y + 9 = 0$ ו- $-x - y + 4 = 0$.

הישרים מחלקים את המישור לארבעה אזורים. צבעו כל אזור בצבע שונה.

הקלידו לכל אזור מערכת אי-שוויונים מתאימה, לדוגמה: $-5x + 12y + 9 > 0$ ו- $-x - y + 4 > 0$.

והקישו  לצביעה.

באלו אזורים יהיו מרחקיה המכוונים של כל נקודה לשני הישרים - שווי סימן?

באלו אזורים יהיו מרחקיה המכוונים של כל נקודה שנבחר לשני הישרים - שוני סימן?

בדקו את תשובותיכם.

ז. מה המשמעות האלגברית והגיאומטרית של שתי המשוואות הבאות:

$$dd(-5, 12, 9, x, y) = dd(-1, -1, 4, x, y)$$

$$dd(-5, 12, 9, x, y) = -dd(-1, -1, 4, x, y)$$

ח. שרטטו את הישר שמשוואתו: $3x - 4y = 0$.

כיצד נקבע את הסימן של המרחק המכוון של הנקודה $(3, 1)$ אל הישר, מבלי לחשבו בעזרת הנוסחה?

לא נוכל להסתמך על סימן המרחק המכוון של ראשית הצירים אל הישר, מאחר והמרחק מהראשית לישרים העוברים דרך ראשית הצירים $Ax + By = 0$ ($A, B \neq 0$) הוא כמובן 0.

נסכים לבדוק לחלופין את סימנו של המרחק המכוון (dd) מהנקודה $(0, 1)$ לישר הנתון.

מהו המרחק המכוון של הנקודה $(0, 1)$ מהישר?

מהו הסימן של המרחק אל הישר של הנקודה $(3, 1)$? בדקו על-ידי חישוב.

מהו הסימן של המרחק אל הישר של הנקודה $(-2, 0)$? בדקו על-ידי חישוב.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name2.3.dfw

פעילות 2.4 – שאלות

א. הנקודה K מונחת על הישר $-5x + 12y + 9 = 0$ ברביע הראשון.

המרחק של נקודה K אל הישר: $-x - y + 4 = 0$ הוא $4\sqrt{2}$.

מהם שיעורי הנקודה K? בנו שרטוט מתאים.

נתחו את הפתרון וארגנו אותו.

ב. קדקודי המשולש ABC הם: $A: [-5, -7]$, $B: [-5, 13]$, $C: [25/3, 3]$

מהו מרכז המעגל החסום במשולש?

ג. מרחקה של נקודה $[x, y]$ אל ישר מבוטא על-ידי הביטוי $\frac{|2x-3|}{2}$.

מהי משוואת הישר? הדגימו בשרטוט שלוש נקודות הנמצאות במרחק של 4 יחידות מהישר.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name2.4.dfw