10. חתכי חרוט

מבוא

ביחידה זו נברר למה כל העקומות שפגשנו ביחידות הקודמות נכנסות אל תוך מסגרת מאחדת, הנקראת "חתכי חרוט". היוונים הקדומים כבר חקרו לעומק את הצורות ההנדסיות הקלאסיות במישור ובמרחב. אנחנו נחקור אותן עם המחשב.

את העבודה נעשה בעזרת Derive 6 על מנת להשתמש בתכונות גרפיות מיוחדות שלו. נעבוד גם עם התוכנה הגרפית DPGraph: כדי לפתוח את הקבצים שיצרנו בעזרת תוכנה זו, ניתן להוריד את ה-Viewer חינם מן האתר http://www.dpgraph.com - כך תוכלו לראות את השרטוטים ולהפעיל את האנימציות.

רשימת הפעילויות:

פעילות 10.1 – התמצאות בחלון גרפי תלת-מימדי

פעילות 10.2 – חתך חרוט

פעילות 10.3 – חיתוך של חרוט עם מישור משתנה

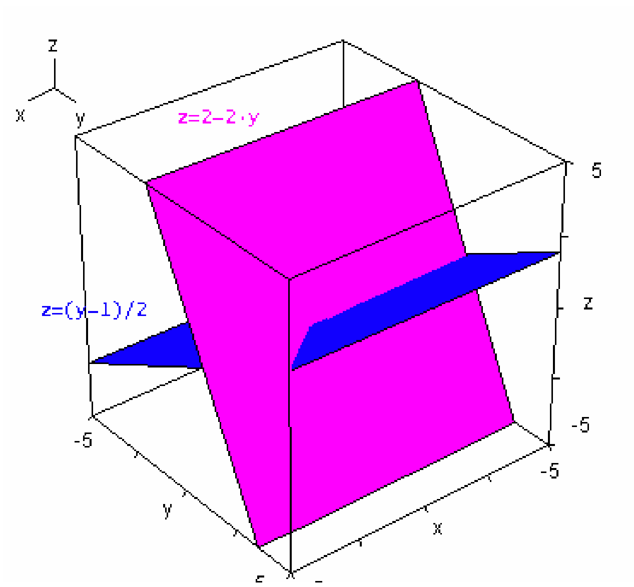
פעילות 10.4 – חתכי חרוט מגוונים

פעילות 10.1 – התמצאות בחלון גרפי תלת-מימדי

משוואה קרטזית של מישור היא משוואה מהצורה $ax + by + cz + d = 0$ שבה המקדמים a, b, c לא יכולים להיות שווים ל- אפס בו-זמנית.

א. אם $a = 0$, המישור מקביל לציר ה- x.

לדוגמא משוואות המישורים בשרטוט הבא הן $2y + z - 2 = 0$ ו- $y - 2z - 1 = 0$.



השלימו:

אם $b=0$, המישור מקביל לציר ה-______.

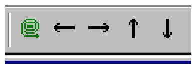
אם $c=0$, המישור מקביל לציר ה-______.

אם $d=0$, המישור עובר דרך ראשית הצירים.

הדגימו בשרטוט.

הקליקו בסרגל הפקודות על  לפתיחת חלון גרפי תלת-ממדי.

הקישו על  לשרטוט.

בעזרת אחד הכפתורים  ניתן לסובב את מערכת הצירים ולראות את המשטח ששרטטתם מכיוונים שונים. נסו זאת.

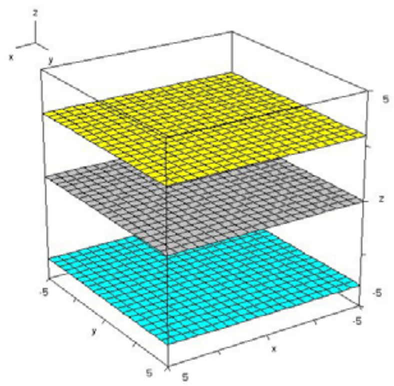
<u>שינוי צבע השרטוט:</u>

הקליקו בתוך השרטוט ויפתח תפריט לשינויים.

להוספת משוואת המישור לשרטוט באופן אוטומטי: Options > Annotate New Plots

ב. המישור מקביל למישור xy אם, ורק אם, יש לו משוואה מהצורה $z = k$.

לדוגמה: משוואות המישורים באיור הבא הן $z = 3$, $z = 0$, $z = -4$.



השלימו:

המישור מקביל למישור yz אם, ורק אם, יש לו משוואה מהצורה ______.

שרטטו שלושה מישורים כאלה.

המישור מקביל למישור xz אם, ורק אם, יש לו משוואה מהצורה ______.

שרטטו שלושה מישורים כאלה.

שרטטו את שלושת מישורי המערכת (דהיינו מישור xy, מישור yz ומישור xz) באותו שרטוט.

ג. מישורים מקבילים:

נתונים שני מישורים $P: ax + by + cz + d = 0$ ו- $P': a'x + b'y + c'z + d' = 0$.

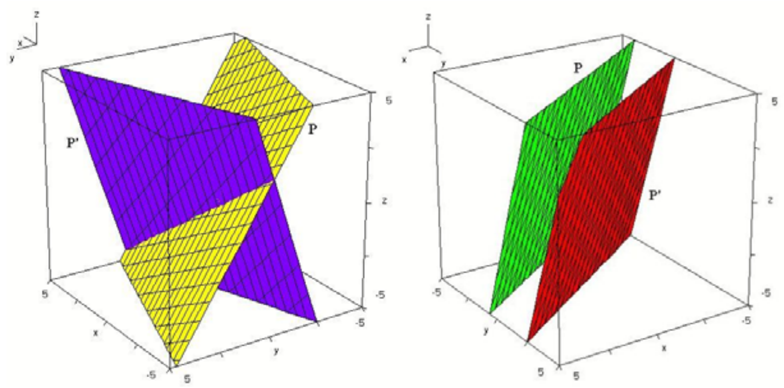
הם מקבילים אם, ורק אם, שלשות המקדמים (a, b, c) ו- (a', b', c') הן פרופורציונליות.

לדוגמה:

נתון $P: 2x - 3y + z - 7 = 0$ ו- $P': 4x - 6y + 2x + 5 = 0$. הם מקבילים (ראו שרטוט א').

נתון $P: x + 3y + 2z + 1 = 0$ ו- $P': 2x - 6y + 2z + 5 = 0$. הם לא מקבילים (ראו שרטוט ב').

(א) (ב)



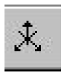
שימו לב: בין שני השרטוטים, סובבנו את מערכת הצירים.

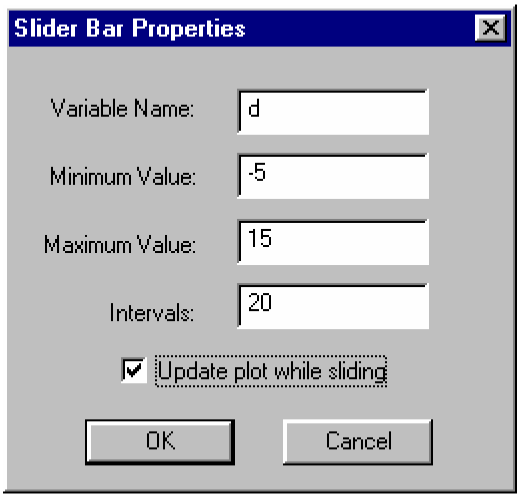
<u>תרגיל</u>: נתון מישור שמשוואתו היא $x - 2y + y - 2 = 0$. בעזרת Derive, מצאו את המישור המקביל למישור הנתון והעובר דרך הנקודה (-1,3,2).

ד. חקרו את השפעת המקדמים של המשוואה.

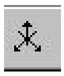
<u>השפעת המקדם d</u>.

1. רשמו בחלון האלגברי את המשוואה $x + y + z + d = 0$.

2. בעזרת הכפתור  עברו לחלון ה– 3D. לפני שתוכלו לשרטט מישורים השייכים למשפחה הקישו בחלון הגרפי על Insert>Slider Bar. נפתחת תיבת שיח:

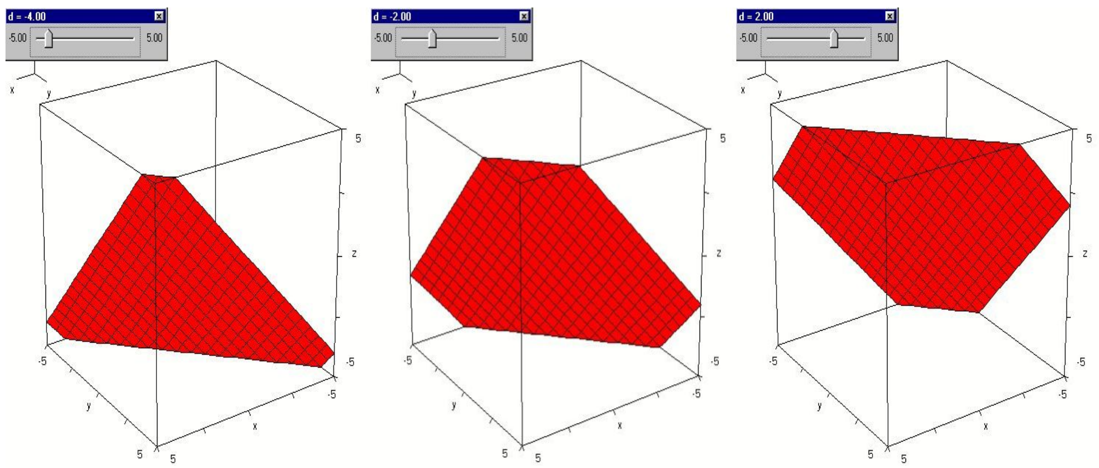


כשם משתנה רשמו את d וסמנו בקליק במשבצת התחתונה שאתם מבקשים עדכון השרטוט תוך כדי גלישת ה-Slider Bar (בעברית סרגל גלישה). את הנתונים המספריים, הכניסו לפי שקולכם. בתמונה לעיל, שינינו את בחירות המחדל של Derive.

3. עכשיו הקישו שוב על הכפתור  בחלון ה- 3D. מה אתם מקבלים?

4. לאט לאט הזיזו את הכפתור הנייד של הסרגל. מה קורה?

בעצם מה שבצענו הוא "הזזה מקבילה של המישור". להלן דוגמאות:



שימו לב: הצורות ה"מוזרות" נובעות מזה ששמרנו על מסגרת התיבה.

<u>העברת שרטוט מהחלון הגרפי לחלון האלגברי:</u>

מתפריט File (בחלון הגרפי) בחרו Embed. תוכן החלון הגרפי יעבור לחלון האלגברי. בהקלקה על התמונה בחלון האלגברי יפתח החלון הגרפי עם התמונה (ואז אפשר לעדכן את התמונה).

<u>השפעת המקדם a</u>

1. רשמו את המשוואה $ax + y + z + 1 = 0$ בחלון אלגברי חדש.
2. חזרו על הסעיפים של החלק הקודם , עם ההתאמות הדרושות (a במקום d כמשתנה עבור סרגל הגלישה).
3. מה קורה?

<u>השפעת המקדם b</u>

1. רשמו את המשוואה $x + by + z +1= 0$ בחלון אלגברי חדש.
2. חזרו על הסעיפים ב' – ה' לעיל , עם ההתאמות הדרושות (b במקום d כמשתנה עבור סרגל הגלישה).
3. מה קורה?

ה. שרטטו באותו שרטוט את המישורים הנתונים ע"י המשוואות הבאות:

$$x + y + z +1 = 0,\ \ x - y + z + 1 = 0,\ -x + y + z + 1 = 0,\ -x - y + z + 1 = 0$$

זהו בשרטוט כל אחד מהמישורים.

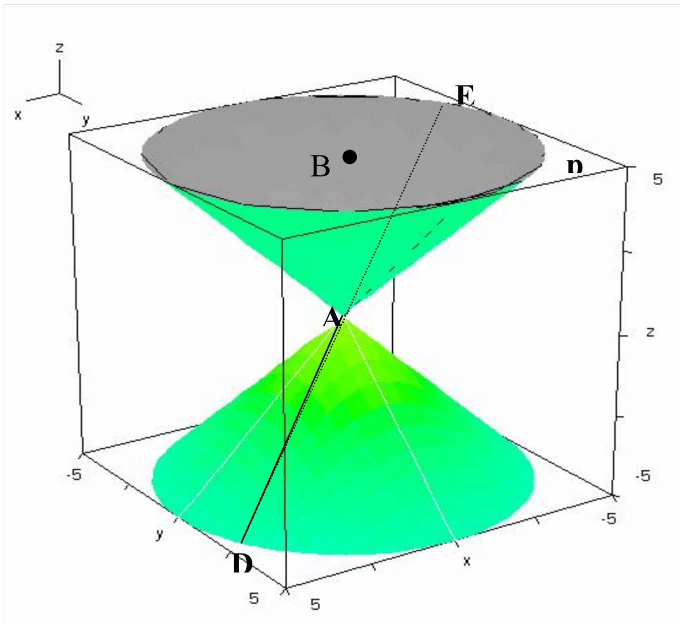
שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name10.1.dfw

פעילות 10.2 – חתך חרוט

הקדמה: חרוט

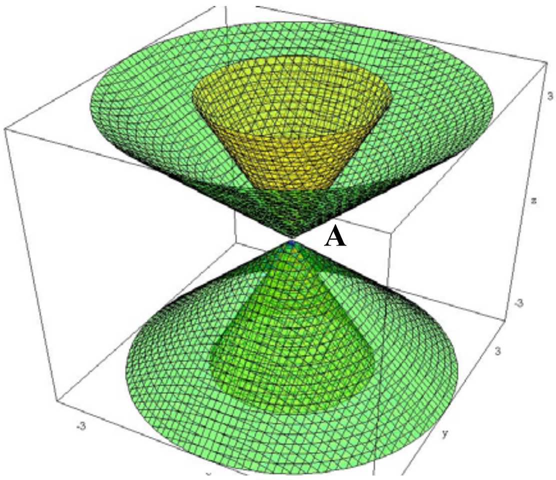
במרחב התלת-מימדי נתונים מישור P ונקודה A לא על P . במישור P נתונה עקומה C. המשטח הנוצר ע"י כל הישרים העוברים דרך A ונקודה אחת של C נקרא *חרוט* (באנגלית conus או cone), הנקודה A היא *הקדקוד* של החרוט. ישר העובר דרך A וחותך את C נקרא *קו יוצר* של החרוט.

אם העקומה C היא מעגל בעלת מרכז B כך שהישר AB מאונך ל-P, קוראים לחרוט C בשם *חרוט של סיבוב* כי הוא נוצר מסיבוב הישר DE מסביב לישר AB הנקרא ציר החרוט.



חרוט של סיבוב עם שניים מיוצריו

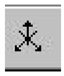
במישור נתון נעיין בשני מעגלים בעלי אותו מרכז ורדיוסים שונים. על ישר מאונך למישור זה העובר דרך מרכז המעגלים נבחר נקודה A. החרוטים הנבנים עם קדקוד A והנשענים על המעגלים הם שונים זה מזה: אחד מהם "פתוח" יותר מהשני, כפי שרואים בשרטוט הבא:

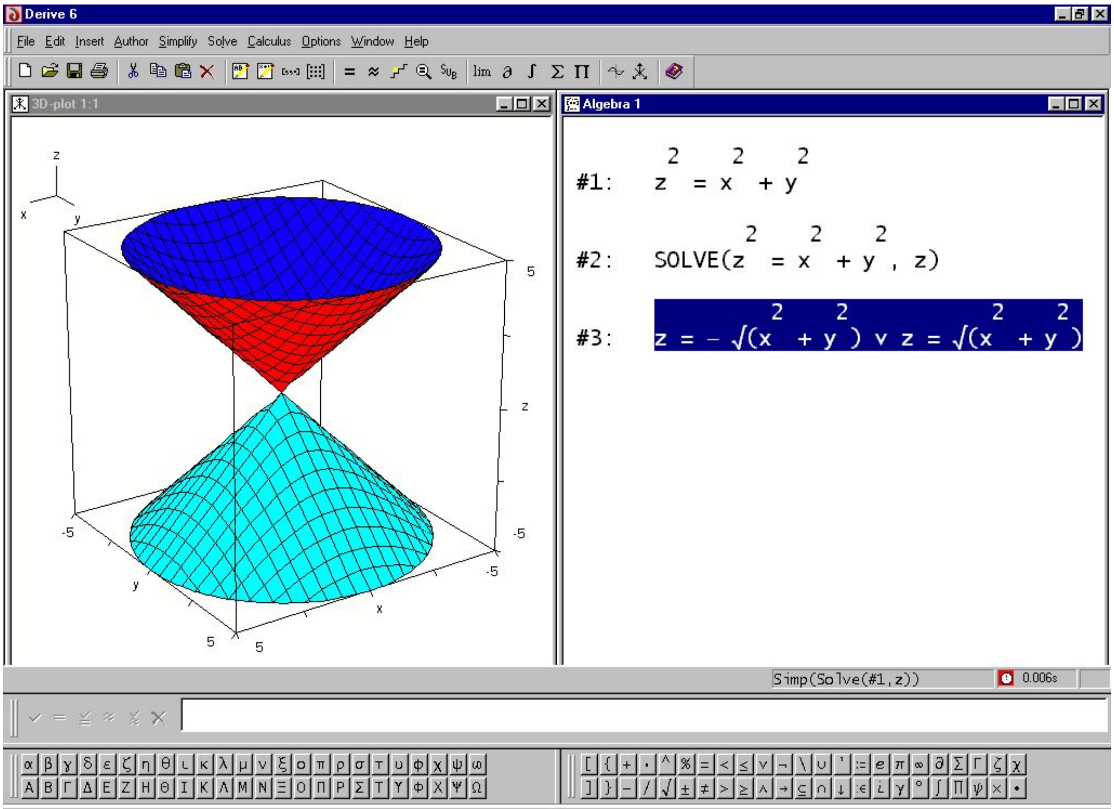


מה שנלמד מעתה הוא נכון עבור כל חרוט של סיבוב, אבל נעבוד במקרה המיוחד, הנקרא *החרוט הסטנדרטי* שמשוואתו היא $x^2 + y^2 = z^2$.

Derive יודע לשרטט גרף של פונקציה של שני משתנים, אבל לא גרף נתון ע"י משוואה המגדירה את z כפונקציה סתומה של x ו- y .

לכן, נבטא את z כפונקציה של x ו- y בעזרת הפקודה Solve. מה מתקבל?

עכשיו אפשר לשרטט  את שתי יריעות החרוט בחלון ה- 3D .



הצבעים השונים מראים ש- Derive שרטט את החרוט כאיחוד של שני חלקים, אשר ייקראו *יריעות*.

שימו לב, בניגוד להרגל היום יומי, במתמטיקה חרוט מורכב משתי יריעות!

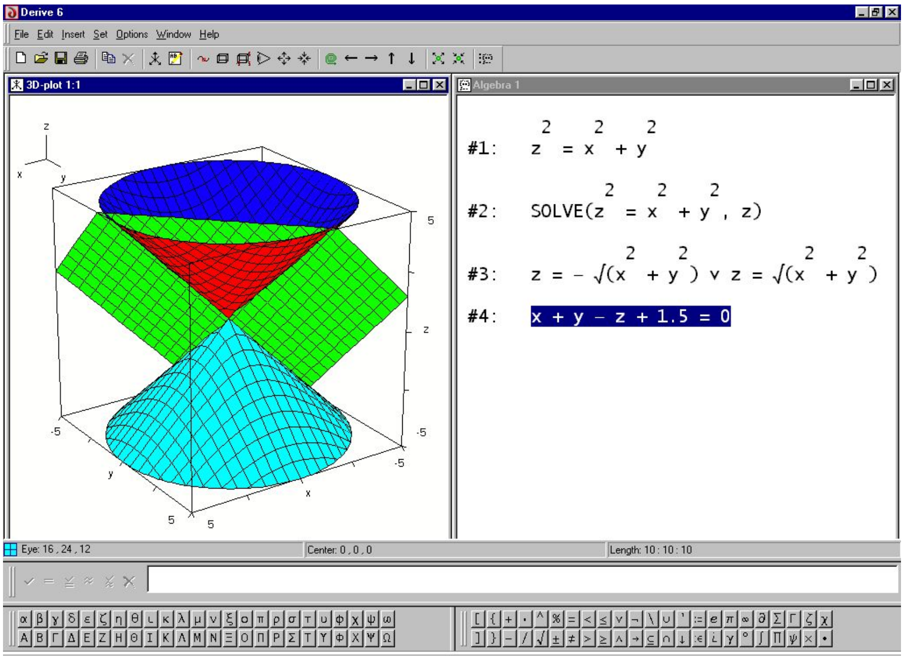
נזכור שמשוואה קרטזית של מישור במרחב היא $ax + by + cz + d = 0$. *חתך החרוט* הוא איפוא

קבוצת האמת של מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$.

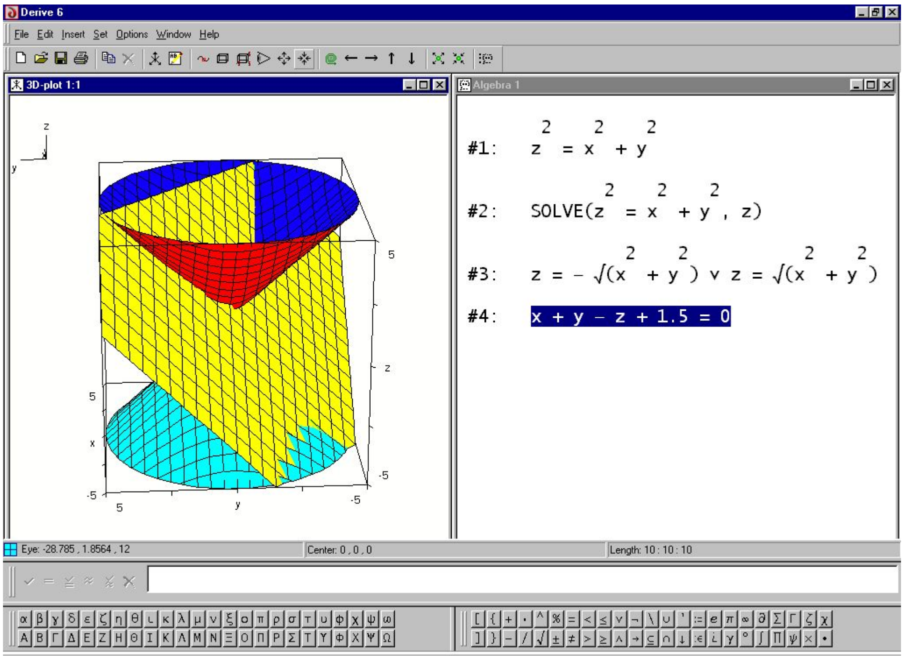
א. שרטטו את החרוט הסטנדרטי.

שרטטו אותו באותו חלון את המישור שמשוואתו היא $x + y - z + 1.5 = 0$..

שרטטם את המישור? אם כן, מה אתם רואים?



כדי לשפר את המצב, סובבו את השרטוט בעזרת הכפתור  בחלון ה- 3D. לחיצה נוספת עוצרת את התנועה.



המישור מופיע בשני השרטוטים הנ"ל בשני צבעים שונים. זה משום שאנו רואים אותו משני "צדדים" שונים. Derive מאפשר להבדיל בין צד עליון לצד תחתון (או צד פנימי וצד חיצוני). ראינו כבר את זה עם החרוט עצמו.

מה אתם רואים תוך כדי סיבוב? האם אתם רואים את החיתוך של החרוט והמישור?

נקודות החיתוך של המישור עם החרוט מהוות קבוצת האמת של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y - z + 1.5 = 0 \end{cases}$$

על מנת לראות את החיתוך יותר טוב, נעבור *להצגה פרמטרית* של החיתוך של המישור והחרוט.

בטאו את y, z בעזרת x: [x, _______________, _______________]

שרטטו את העקומה בחלון הגרפי. מהי עקומה המתקבלת?

ב. נחקור עתה את ההטלה על מישור xy של חתך החרוט שמצאנו. לכל נקודה (x, y, z) במרחב נתאים את הנקודה $(x, y, 0)$. רשמו את ההצגה הפרמטרית של ההטלה: [x, __________, 0] והוסיפו אותה לשרטוט. הוסיפו גם את שרטוט המישור $z = 0$. מה אתם רואים?

נעבוד עתה בדרך אחרת. ממערכת המשוואות
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y - z + 1.5 = 0 \end{cases}$$

נובעות המשוואות הבאות, בנעלמים x ו- y בלבד:

$$\pm\sqrt{x^2 + y^2} = x + y + 1.5$$

הפכו את המשוואה הזאת למשוואה פולינומיאלית בשני משתנים (רמז: תחילה, מעלים את שני האגפים לחזקה השנייה).

ג. *ההטלה* על מישור xy היא הפונקציה אשר לכל נקודה במרחב ששיעוריה הם (x, y, z) מתאימה את הנקודה ששיעוריה הם $(x, y, 0)$. התוצאה של ההטלה נקראת *היטל*.

חקרו את ההיטלים של חתכי החרוט הסטנדרטי עם המישורים הנתונים להלן.

1. $x + z - 1 = 0$
2. $x - y + 4z - 10 = 0$

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name10.2.dfw

פעילות 10.3 – חיתוך של חרוט עם מישור משתנה

א. רשמו משוואת החרוט הסטנדרטי ושרטטו אותו בחלון הגרפי התלת מימדי.

נתונה משפחת מישורים על-ידי המשוואה הפרמטרית: $x + az - 1 = 0$.

חקרו בעזרת סרגל גלישה כיצד משתנה צורת חתך החרוט עם המישורים, כאשר a משתנה.

להוספת סרגל גלישה הקישו בחלון הגרפי על Insert>Slider Bar.

הדגימו כיצד משתנה ההיטל של חתך החרוט על מישור xy כאשר a משתנה ומצאו את משוואות ההיטלים בדוגמאות שתבחרו.

ב. נתונה משפחת מישורים על-ידי המשוואה הפרמטרית: $x - y + az - 1 = 0$.

חקרו בעזרת סרגל גלישה כיצד משתנה צורת חתך החרוט עם המישורים, כאשר a משתנה.

הדגימו כיצד משתנה ההיטל של חתך החרוט על מישור xy כאשר a משתנה ומצאו את משוואות ההיטלים בדוגמאות שתבחרו.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name10.2.dfw

פעילות 10.4 – חתכי חרוט מנוונים

א. חקרו את החיתוך של החרוט הסטנדרטי עם המישור המוגדר ע"י המשוואה $x + y = 0$.

ב. חקרו את החיתוך של החרוט הסטנדרטי עם המישור שמשוואתו היא $x + z = 0$.

ג. מהו החיתוך של החרוט הסטנדרטי עם המישור שמשוואתו היא $z = 0$ (הוא מישור xy).

ד. נתונה משוואת מישור עם פרמטר $z – ax = 0$.
חקרו בעזרת סרגל גלישה כיצד משתנה צורת חתך החרוט עם המישורים כאשר a משתנה.

ה. מצאו משוואת מישור כך שהמשוואה $2x^2 + 3xy – 2y^2 = 0$ מתארת את ההיטל של החיתוך של המישור עם החרוט הסטנדרטי.

שמרו את הקובץ שבניתם בשם שלכם, name10.4.dfw