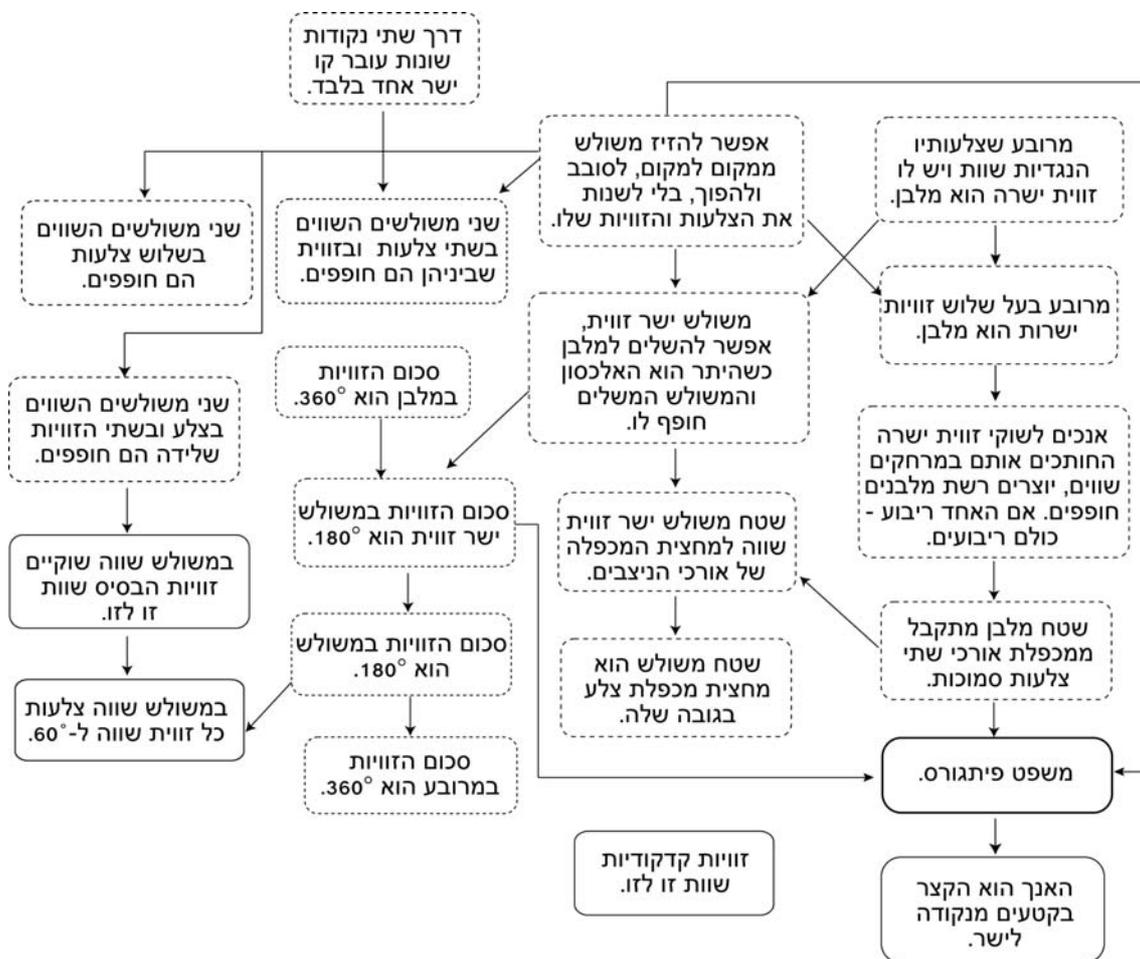


# יחידה 18 – משולש שווה שוקיים ומשולש שווה צלעות

נכיר תכונות של משולש שווה שוקיים ומשולש שווה צלעות.

מה ביחידה?

- מוכיחים כי במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש מחלק אותו לשני משולשים חופפים.
- מוכיחים כי במשולש שווה שוקיים שוות זוויות הבסיס. מנסחים את המשפט ההפוך ומוכיחים אותו.
- במשולש שווה צלעות שוות כל הזוויות זו לזו.
- מזהים משולשים לפי נתונים, משלימים נתונים כאשר ידוע שהמשולש שווה שוקיים או שווה צלעות.



## מבנה היחידה

יחידה זו מיועדת לשלושה שיעורים.

### חלוקה לשיעורים

שיעור ראשון	משולש שווה שוקיים משימות 1-3 מהמהלך. שיעורי בית: משימות 1-7 מאוסף משימות.
שיעור שני	משפט ישר והפוך, משימות 4-5 מהמהלך. שיעורי בית: משימות 6-9 מתוך אוסף משימות.
שיעור שלישי	משולש שווה צלעות 6-9 מהמהלך. שיעורי בית: משימות 10-14 מאוסף משימות.

### חלוקה לנושאים

גובה, תיכון, וחוצה זווית במשולש שווה שוקיים	משימות 1-2: מגלים ומוכיחים תכונות של משולש שווה שוקיים. משימות 3-5: מסקנות נוספות, משפטים הפוכים.
חישובים במשולש שווה צלעות	משימות 6-7: תכונות של משולש שווה צלעות. משימות 8-9: יישומים.

### חומרי עזר ליחידה

משימה 2	לכל תלמיד: משולש שווה שוקיים. (דוגמאות מצורפות).
משימה 1	להצמדה ללוח: שלושה שרטוטים (מצורפים)
משימה 2	שרטוט לסעיף ד' (מצורף).
משימה 6	4 שרטוטים בהגדלה (מצורפים).
משימה 9	שרטוט גדול שכל פעם מוסיפים בו נתון, לפי סעיף ג' (מצורף).

### שיעורי בית

משימה 1	שיום צלעות וזוויות במשולש שווה שוקיים. השלמת גדלים במשולשים שווי שוקיים. זיהוי סוג המשולש על-פי נתונים לגבי זוויות או קטעים בו. מסקנות והוכחות. יישומים
משימות 2-5	
משימות 6-7, 10-11	
משימות 8-9, 14	
משימות 12-13	

### מטרות היחידה

- הכרת תכונות של משולשים שווה שוקיים ושווה צלעות.
- חשיפה למונח משפט הפוך.

## מהלכי השיעורים

### שיעור 1

פותחים את השיעור **במשימות 1-2** במליאה. במשימה 1 מזכרים במשולש שווה שוקיים, תוך כדי חישובים וסימונים. במשימה 2 מוכיחים את התכונות שלו. מקדימים להוכחה חקירה באמצעות קיפול, בעזרתה מוצאים מהם התכונות **שבהמשך מנסחים** אותם כמשפט.

בסעיף ב חוקרים את המשולש על-ידי קיפול לאורך חוצה זווית הראש, וחוזרים ומקפלים לאורך הגובה לבסיס והתיכון לבסיס. **שלא במפתיע**, מגלים ששלושת הקווים מתלכדים.

מתעוררת השאלה אם תכונה זו מתקיימת לכל צלע שנבחר, והיא נבדקת בסעיף ג. הבדיקה חשובה, שכן היא מראה על הצורך לציין שמדובר בקווים העוברים מזווית הראש אל הבסיס.

בהמשך, בסעיף ד, שואלים לגבי דרכים שהתלמידים מכירים ואשר בעזרתם אפשר להוכיח שוויון של קטעים או של זוויות. חשוב שהתלמידים עצמם יציעו **לחפש משולשים חופפים** לשם כך.

במשפט זה מוכיחים תכונה אחת של משולש שווה שוקיים. תכונה נוספת, המתקבלת כתוצאה של שלב בהוכחה, היא שוויון זוויות הבסיס. בסעיף ה מקבלים על סמך חפיפת המשולשים, גם את שוויון זוויות הבסיס. **המשפט ההפוך**, אותו מוכיחים בשיעור הבא, מתאר תנאי מספיק לקבלת משולש שווה שוקיים.

**משימה 3** היא משימה פרטנית המיועדת ליישום המשפטים לשם מציאת קטעים שווים. למסקנות אלו חשיבות רבה כי הן מטפלות בשגיאות נפוצות. אחת מהן היא **הכללת יתר** מכך שחוצה זווית **הראש** במשולש שווה שוקיים הוא גם תיכון לבסיס, לכך שחוצה זווית **הבסיס** במשולש שווה שוקיים הוא ...

בהמשך מטפלים במשולש שווה שוקיים ישר זווית. **וחוזרים** על אותן שאלות שבחלק הראשון.

חשוב לוודא במליאה לאחר הפעילות על סמך מה קבעו התלמידים את ההיסקים. שואלים: האם היה **נתון מיותר**? מדוע אין צורך בו?

יש חשיבות רבה לתהליך דרכו התלמידים מוצאים בעצמם מהו המשפט הנכון. רצוי לא "להצניח" משפטים, אלא לחקור, להשתכנע שהם כנראה נכונים, ולהוכיח כדי לאשר את השערתם.

בשיעור הקודם מי שהיה בידו משולש שווה שוקיים או שווה צלעות נתקל בתופעה זו.

ההבנה, שלצורך מציאת נתונים שווים (קטעים או זוויות) צריך למצוא משולשים חופפים עומדת בבסיס של הרבה הוכחות.

במהלך ההוראה המוצג בספר זה, מושם דגש במשפטים על תכונות ותנאים מספיקים. תכונות בדרך כלל מתוארות במשפטים הישירים, והתנאים המספיקים מובאים במשפטים הפוכים.

בהכללת יתר זו מטפלים בסעיפים א' ו-ב'. בסעיף א נתון חוצה זווית הראש, סעיף ב חוצה זווית הבסיס.

סעיפים ג-ד' הם חזרה על א'-ב' למקרה שהמשולש שווה השוקיים הוא גם ישר זווית.

בסעיף ג', הנתון משולש ישר זווית, מיותר. אפשר להסיק על סמך יתר הנתונים. בסעיף ד' הנתונים לא

אם אין די זמן אפשר לוותר על סעיפים ג-ד.

מספיקים, והתוספת שהמשולש ישר זווית אינה קשורה למסקנה.

## שיעור 2

שיעור זה עוסק בהוכחות של תכונות של משולש שווה שוקיים, ותנאים מספיקים לקבלת משולש שווה שוקיים. התכונות מובאות במשפט ה"ישר", והתנאים המספיקים במשפט "ההפוך".

פותחים במליאה, **במשימה 4**. סעיף א הוא תזכורת לתכונה שדנו בה בשיעור הקודם: במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו.

שואלים:

האם, לדעתכם, כל משולש שיש לו שתי זוויות שוות הוא שווה שוקיים?

העובדה שמשפט שהוכח, נכון תמיד, אינה ברורה מאליה. רצוי לשאול על כך מפעם לפעם, ולא להניח שזה ברור.

התלמידים בשלב זה בשלים לשימוש בתנאים מספיקים, ובחיפוש תנאים מספיקים.

האם, לדעתכם, זוג זוויות שוות הוא תנאי מספיק לקבלת משולש שווה שוקיים?

מעודדים הצעות של תלמידים, מחפשים נימוקים.

מסכמים:

אילו תכונות יש למשולש שווה שוקיים?

- אפשר לחלק אותו לשני משולשים חופפים.
- חוצה זווית הראש הוא גם הגובה וגם התיכון.
- זוויות הבסיס שוות.

שואלים על תנאים מספיקים לקבלת משולש שווה שוקיים.

מכאן עוברים לסעיפים ב-ד, ולמשימה הבאה.

דרך אלטרנטיבית מדגישה את ההיבט האינטואיטיבי של הוכחה.

יוצאים ממשולש בו זוויות שוות  $\sphericalangle K = \sphericalangle M$

שואלים אם הוא שווה שוקיים?

אם כן, אילו צלעות תהיינה שוות?

מה צריך למצוא כדי להראות שקטעים (צלעות) שווים?

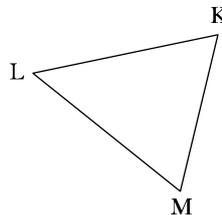
מובילים את התלמידים לצורך בחפיפה של שני משולשים.

יצירת המשולשים היא השלב הבא בתהליך.

שואלים: איך נחלק את המשולש כך שיתקבלו משולשים חופפים?

אוספים הצעות.

שינוי סדר הסעיפים במשימה, דילוג על סעיף ב'.



התובנה, שקטעים שווים או זוויות שוות אפשר למצוא במשולשים חופפים, חשובה מאד, אך אינה ברורה מאליה.

ההצעות המתאימות הן: חוצה

זווית של  $\sphericalangle L$  או גובה ל-  $KM$ .

הצלע משותפת, הזוויות אינן ליד הצלע.

מה אפשר לומר על קו הקיפול? מדוע הוא חייב להיות תיכון? גובה? חוצה זווית?

תיכון או חוצה זווית

רושמים מהלך הנראה כמו הוכחה, אך אינו מסתמך באמת על אמיתות קודמות, אלא מחקה רק את צורת הכתיבה של הוכחה. מכיון שהם מחפשים דבר מוכר או רמז לתשובה, ומנחשים.

רושם זה מטעה כאשר תלמידים מסתכלים על צורה חיצונית ולא על התוכן.

מסעיפים אלו עולה תכונה של משולש שווה צלעות. משולש שווה צלעות חייב להיות חד זווית.

התרומה של עבודה במספר קטן

מקבלים שני משולשים השווים בצלע ובשתי זוויות בהתאמה.

במהלך ההוכחה הראינו שהתקבלו שני משולשים חופפים.

שואלים: האם כל משולש שאפשר לקפל אותו באופן שיתקבלו שני משולשים חופפים הוא שווה שוקיים?

**משימה 5** מטפלת במשפטים הפוכים למשפט שבמשולש שווה שוקיים הגובה, התיכון וחוצה הזווית מתלכדים. כלומר נרצה להוכיח שמספיק שידועים שבמשולש הגובה והתיכון מתלכדים או הגובה וחוצה הזווית, כדי לדעת שהמשולש שווה שוקיים.

משתמשים בחפיפת המשולשים. גובה ותיכון תורמים לחפיפת המשולשים לפי שתי צלעות והזווית שביניהן. גובה וחוצה זווית תורמים נתונים לחפיפת משולשים לפי צלע ושתי זוויות בהתאמה.

חשוב להדגיש שלא די בשוויון של קטעים או זוויות בנוסף לנתון על גובה. הכרחי שאותו קו יהיה גם הגובה וגם התיכון או חוצה הזווית.

תלמידים שאינם מבינים מהי הוכחה, אך "עושים תנועות" של הוכחה, עלולים להסיק כאשר נתונים שוויון (קטעים או זוויות) ואנך, שהתקבל משולש שווה שוקיים. הם אינם שמים לב שאין קשר בין האנך לנתונים האחרים.

לדוגמה: במשולש ישר הזווית נתון חוצה הזווית הישרה.

הרישום הפורמאלי:  $AB \perp BC$ ,  $BD$  חוצה זווית.

רישום זה יוצר רושם שיש קשר בין הנתונים.

שיעורי הבית עוסקים ביישום המשפטים (משימות 6,7) ובתרגול של הוכחות (משימות 8,9). לכל רמה יש משימה אחת מכל סוג.

שיעור 3

משולש שווה צלעות.

**משימה 6** משמשת כמשימת שיגור במליאה לתזכורת. בהמשך,

מבררים במהלך **משימה 7** אם התנאים הנתונים הם מספיקים לקבלת משולש שווה צלעות (א-ה). הסעיפים האחרונים דנים במשולשים ישרי זווית ושווה שוקיים (ה-ז), ובמשולש קהה זווית (ח).

של תלמידים הפעילים ביחד, היא בעידוד שיח מתמטי בין תלמידים. הצורך להחליט, בניגוד לנתינת משפט שמראש יודעים שהוא נכון, הופך את השאלות מתרגילי סרק לבעיה אמיתית שצריך לפתור.

כאשר אין מספיק נתונים נדרשת התמודדות כפולה. גם להבין מדוע הנתונים אינם מספיקים וגם למצוא נתון נוסף.

הדרכים מרובות. אפשר כמובן להוסיף תנאי שלוקח בחשבון את התנאים הקיימים, אך תלמידים עשויים לתת גם תנאים "עודפים", כגון עוד זווית בת  $60^\circ$ .

לא רק אם המשולש שווה צלעות, אלא גם לבחון אם הוא שווה שוקיים.

**במשימות 8 ו-9** בודקים אם התקבל משולש שווה צלעות. משימה 8 מיועדת לעבודה פרטנית, בזוגות או בקבוצות קטנות.

בכל סעיף מוצגים נתונים ועל התלמידים לבחון ולהחליט אם המשולש הוא שווה צלעות. ההחלטות ישענו על תנאים מספיקים לקבלת משולש שווה צלעות שדנו בהם במשימה 7. כך אחת הדרכים היא לחפש שלוש זוויות שוות, או שתי זוויות בנות  $60^\circ$ .

בסעיף ג אין מספיק נתונים. במקרה כזה מתבקשים התלמידים להציע נתון נוסף שיבטיח קבלת משולש שווה צלעות. מאחר שיש זווית אחת בת  $60^\circ$ , די להראות שהמשולש שווה שוקיים. אפשר לעשות זאת בדרכים שונות, לדוגמה להוסיף שהגובה הוא גם חוצה זווית.

בסעיף ד צריך לשים לב, שהמשולש שווה שוקיים בשני אופנים שונים, פעם  $AB=AC$  לפי הנתון, ופעם  $BA=BC$  כי התיכון והגובה מקדקוד B מתלכדים.

חשוב לעבור בין התלמידים, לחזק דיונים ביניהם, לעודד הקשבה זה לזה, ולצפות בקשיים. כך בזמן הדיון במליאה במשימה הבאה, יהיה אפשר להציג דיונים מעניינים, או לטפל בשגיאות שחזרו.

משימה 9 היא עליה בדרגה, כי יש לבדוק אפשרויות שונות. בנוסף, יש הפעם קווים במשולש מקדקודים שונים. צריך לבחון היטב מה נלמד מכל אחד מהם.

לדוגמה בסעיף א שואלים: האם חוצה הזווית הנתון הוא גם גובה? (אי אפשר לדעת) תיכון? (אי אפשר לדעת).

מה אפשר ללמוד מחוצה הזווית? (שהזווית אותה הוא חוצה היא בת  $60^\circ$ ). האם די בזווית בת  $60^\circ$  כדי לקבל משולש שווה צלעות? מה עוד צריכים? וכו'.