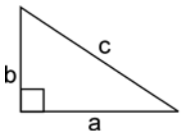
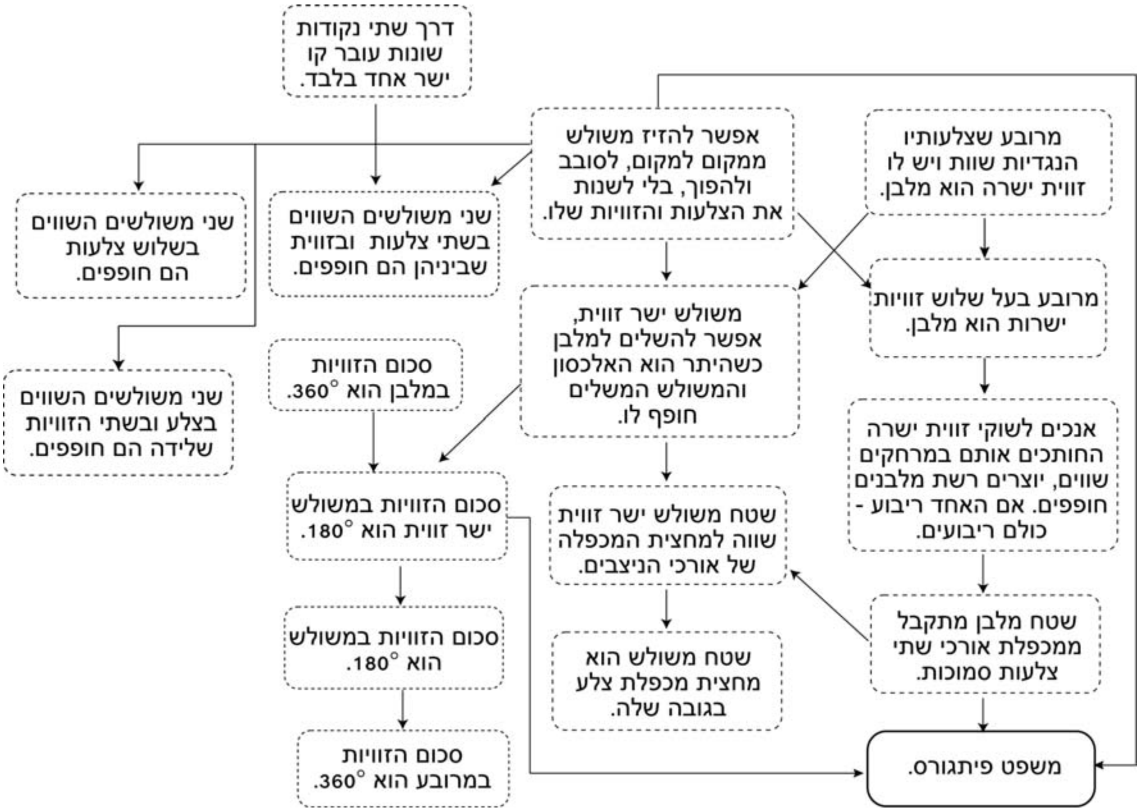
יחידה 14 – משפט פיתגורס

בודקים קשרים בין שטחי ריבועים הבנויים על צלעות משולש ישר זווית ומוכיחים את משפט פיתגורס.

מה ביחידה?



- חוקרים קשרים בין שטחי ריבועים הבנויים על צלעות משולשים. מוצאים על-ידי ההתנסות כי במשולש ישר זווית שטח הריבוע שעל היתר שווה לסכום שטחי הריבועים שעל הניצבים.
- מוכיחים את משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית (a ו-b ניצבים c יתר) מתקיים $a^2 + b^2 = c^2$.
- מראים כי שינוי הזווית הישרה במשולש לזווית קהה – מגדיל את שטח הריבוע שעל הצלע שממול הזווית. שינוי הזווית הישרה במשולש לזווית חדה – מקטין את שטח הריבוע שעל הצלע שממול הזווית. לכן במשולש שאינו ישר זווית **לא יתקיים** השוויון $a^2 + b^2 = c^2$.



מבנה היחידה

יחידה זו מיועדת לשני שיעורים.

חלוקה לשיעורים

שיעור ראשון	תזכורת של המשפט; לגבי משולש שווה שוקיים (או הוכחה שלו אם לא הוכיחו בשיעור הקודם). חקירת שטחי ריבועים על צלעות של משולש, משימות 1-2 מהמהלך. שיעורי בית: לפי בחירה, מתוך אוסף משימות.
שיעור שני	הוכחות של משפט פיתגורס, משימות 3-5. שיעורי בית לפי בחירה, מתוך אוסף משימות.

חלוקה לנושאים

חקירת קשר בין שטחי ריבועים	**משימה 1:** חוקרים קשרים בין שטחי ריבועים על צלעות של משולשים. **משימה 2:** סיכום החקירה לגבי משולש קהה זווית, ישר זווית וחד זוויות.
הוכחת משפט פיתגורס	**משימה 3-5:** הוכחות שונות למשפט פיתגורס.

פתיחת השיעור הראשון על-ידי התייחסות למשולש ישר זווית ושווה שוקיים, מאפשרת יצירת מוטיבציה לחקירה הכללית. אפשר לבקש לשער:

- האם לכל משולש שווה שוקיים יתקיים הקשר בין שטחי הריבועים שעל הצלעות?
- האם בכל משולש ישר זווית יתקיים הקשר בין שטחי הריבועים שעל הצלעות?

חומרי עזר ליחידה

למורה: זוג רצועות מחוברות בסיכה, ליצירת זוויות שונות. לכל רצועה צמוד ריבוע. **לכל קבוצה:** משולש ישר זווית וריבועי הניצבים (מצורפים). שמונה משולשים ישרי זווית חופפים (מצורפים).	**משימה 2** **משימה 3** **משימה 4**
להצמדה ללוח: משולש גדול ושני ריבועים שעל צלעותיו, להדבקה גזירה ויצירת הריבוע שעל היתר (מצורפים). שמונה משולשים גדולים ישרי זווית חופפים זה לזה (מצורפים).	**משימה 3** **משימה 4**

שיעורי בית

משימות 1-16	משימות 1-7 חישובי צלעות במשולשים ישרי זווית. משימות 8-16 יישומים שונים למשפט פיתגורס (גאומטריים, וסיפוריים).

מטרת היחידה

הוכחת משפט פיתגורס.

מהלכי השיעורים

שיעור 1

פותחים בתזכורת של המשפט לגבי המקרה הפרטי. שואלים האם בכל משולש יהיה קשר כזה? ומפנים את התלמידים לבדוק בעזרת משימה 1מה קורה לסוגים שונים של משולשים.

משימה 1 היא חקירה, ורצוי להפעיל אותה בזוגות או בקבוצות. החקירה רחבה יותר ממה שנתון במשפט פיתגורס. בודקים קשרים בין סוג המשולש והקשר בין סכום הריבועים שעל הצלעות הקטנות בהשוואה לשטח הריבוע על הצלע הגדולה.

משימה 2 מסכמת את תוצאות החקירה. לשם סיכום נעזרים בזווית גדולה אותה יוצרים משתי רצועות המחוברות בסיכה. משנים את הזווית. כאשר מתקבלת זווית ישרה, מצמידים ללוח ומשלימים למשולש. שואלים: מה יהיה, לפי ממצאי החקירה, הקשר בין הריבועים שעל הניצבים לריבוע שעל היתר?

משנים את הזווית, כך שתהיה קהה. שואלים: מה יקרה לריבועים שעל הצלעות הקטנות? (לא השתנו). איזה ריבוע כן השתנה? (שעל הצלע הגדולה) מה קרה לריבוע זה? (גדל). מה המסקנה? (במשולש קהה זווית הריבוע שעל הצלע הגדולה גדול מסכום הריבועים האחרים). חוזרים על מהלך זה לגבי זווית חדה.

בסיכום נעשית המחשה של השינוי בשטח הריבוע הגדול בעקבות שינוי הזווית בין הצלעות האחרות. הריבועים האחרים אינם משתנים.

מסמנים על הלוח (בגיר או צבע) את הצלעות של המשולש, כך שכאשר נזיז רצועה נראה גם את המשולש המקורי.
אפשר להצמיד ריבועים מתאימים כדי להמחיש. כיון שאורך הצלע לא השתנה, גם הריבועים לא השתנו.

הריבוע שעל הצלע הגדולה גדל, כי שינוי הזווית מגדיל את אורך הצלע שמולה.

שיעור 2

בשיעור זה עוסקים בהוכחות שונות למשפט פיתגורס. אפשר לתת את כולן או חלקן, על-פי הזמן העומד לרשות הכיתה.

במשימות 4-3 מובאות הוכחות שונות למשפט פיתגורס.

במשימה 2 ניתנת הוכחה שאינה שגרתית. ההוכחה נשענת על-פירוק שני הריבועים שעל הניצבים, ויצירת הריבוע שעל היתר מהחלקים.

אפשר לבקש מהתלמידים לשרטט משולש משלהם, כמו במהלך בספר, או לחלק מראש דף עליו שני משולשים לגזירה, וכן שני ריבועים צמודים של הניצבים.

שילוב המחשה בבניית ההוכחה, נותן להוכחה אופי של הוכחה מסבירה.

ביצוע המהלך כפי שהוא מתואר בספר, מובא בהמשך בדיון.
נתינת הדף מקצרת את התהליך. על התלמידים רק לגזור את שני הריבועים כשהם נשארים צמודים. לשרטט עליהם את המשולש בשני מקומות, ולגזור לשלושה חלקים.

משימה 4 מציגה הוכחה רווחת יותר. בדרך כלל יוצאים בהוכחה מריבוע אותו מחלקים פעם לשני הריבועים שעל הניצבים בתוספת ארבעה משולשים, ופעם מריבוע שעל היתר בתוספת אותם משולשים. בספר בחרנו בכיוון שונה, של השלמת הריבועים שעל הניצבים או הריבוע שעל היתר לשני ריבועים זהים. כדאי לבקש מהתלמידים לבצע כל שלב בהוכחה, ואחר כך להדגים על הלוח. אחרי שהשלמנו בעזרת 4 משולשים החופפים למשולש המקורי, פעם את ריבוע היתר ופעם את ריבועי הניצבים, מראים שבשני המקרים התקבל ריבוע חדש. בריבוע זה הצלע בשני המקרים, היא a+b ולכן הריבועים חופפים ושווים בשטחם. שואלים: ומה אם נוריד משולש אחד מכל ריבוע, האם הצורות שיישארו שוות שטח? ואם נוריד עוד משולש? ועוד? ואם נוריד את כל המשולשים?

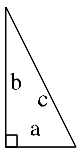
משימה 5 היא פעילות מחשב המציגה דרך נוספת להוכחה. כיתות שיש בהם אפשרות שכל זוג תלמידים ייעשה את הפעילות, יוכלו להחליף אחת ההוכחות בפעילות המחשב.

כיוון שאינו דורש מהתלמיד לנחש למה חלקנו את הריבוע הגדול. יוצאים מהחלקים, הריבועים או הריבוע ובכל פעם מוסיפים ארבעה משולשים.

במהלך השאלות מורידים בכל פעם משולש אחד. כך ממחישים את שיוויון השטחים בכל שלב, ומכאן את שיוויון סכום שטחי הריבועים שעל הניצבים לשטח הריבוע שעל היתר.

דיון על הוכחה למשפט פיתגורס

מורה: בשיעור הקודם שיערנו שבמשולש ישר זווית מתקיים $a^2 + b^2 = c^2$. כל זוג ישרטט על דף משובץ משולש ישר זווית שונה צלעות. לניצבים נקרא a ו-b וליתר c ונסמן זווית ישרה בתוך המשולש.



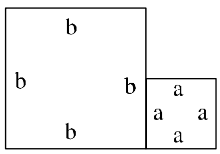
המורה מצמידה ללוח את המשולש מבריסטול.

מורה: נבנה בעזרת המשולש שני ריבועים, ריבוע שצלעו b וריבוע שצלעו a.

המורה מדגימה יצירת זווית ישרה בעזרת המשולש, כדי לבנות ריבוע.

מורה: הנה הריבוע שלי שצלעו b, לידו נצמיד ריבוע עם צלע a

המורה מצמידה ללוח כך:

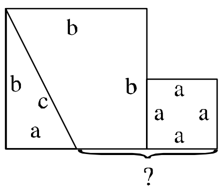


המורה עוברת בין התלמידים כאשר מלהה זוג שלא צייר ריבוע, היא מדריכה את התלמידים. התלמידים משרטטים וגוזרים את הריבועים, ומדביקים אותם זה לזה.

מורה: מה שטח הצורה שעל הלוח *(מצביעה על הריבועים)*?

ת1: $a^2 + b^2$

המורה מניחה את המשולש על הצורה ומסמנת קו כך:

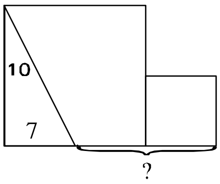


מורה: מה אורך הקטע המסומן ב- $\underbrace{\qquad}$?

ת2: b

מורה: למה?

מבוכה, אין תגובה.



המורה מצמידה שרטוט דומה עם מספרים:

מורה: מה אורך צלע הריבוע הגדול.

ת3: 10

מורה: מה אורך הקטע הקטן שנשאר?

ת3: 3

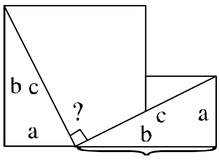
מורה: אם כל זה 10 אז מה זה ה-3 שנשאר?

ת3: 10-7

מורה: נחזור ל a ו-b. מה הקטע שנשאר?

ת4: נחסר a

מורה: כלומר, b – a ולכן כל הקטע הוא a + b – a = b



המורה מניחה את המשולש במקום נוסף, ומסמנת זווית ישרה ו-? מעליה.

מורה: האם הזווית ישרה?

ת2: ישרה

מורה: למה?

ת5: רואים

מורה: מישהו יכול להסביר למה זו זווית ישרה?

ת5: (מסביר באופן שאינו מובן).

מורה: אפשר לנמק?

ת2: נוריד את הזוויות החדות שבמשולש ישר הזווית.

המורה מבקשת מהתלמידים לסמן בעזרת המשולש שלהם את שני הקווים על הריבועים שלהם, ולגזור לפי הקווים שסימנו.

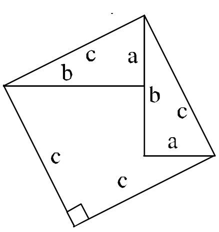
מורה: מה גזרנו?

תלמידים: $a^2 + b^2$

מורה: מה נעשה?

נבסה להרכיב מהחלקים ריבוע.

התלמידים מנסים בזוגות להרכיב ריבוע תלמידה ניגשת ומשלימה על הלוח לבקשת המורה.



מורה: מי יכול להוכיח שהמרובע הוא ריבוע?

ת6: יש ארבע זוויות ישרות

מורה: אחת מספיקה לי

ת4: יש 3 צלעות שוות

מורה: רק 3?

ת5: ארבע, כולם c, c, c, c

ת4: אבל 3 צלעות זה תנאי מספיק

מורה: מה הרכבנו משלושת החלקים?

תלמידים: ריבוע שהצלע שלו c.

הערות

- במהלך הדיון משולבים כל הזמן עשייה והוכחה זה בצד זה.
- נעשית הדרכה מעשית לבניית הריבועים על-ידי שימוש בזווית הישרה שבמשולש, על אף שהתלמידים לא זקוקים לכך, כיוון שיש להם דף משובץ. הבנייה המדגישה הן את אורך הצלעות והן את הזווית הישרה, מכינה את ההוכחה להמשך, בה נשאלים התלמידים מה צריך לבדוק כדי לקבל ריבוע.
- בהוכחה כפי שבוצעה בכיתה הושמט החלק המתייחס לכך שבזמן הרכבת החלקים לא נשארו חללים ריקים.
- נעשה שימוש בדוגמה מספרית (משולש ישר זווית שניצביו 3 ו-7) כדי להבהיר מהו אורך הקטע במקרה הכללי.
- התלמידים בנו בכל זוג משולש משלהם, כך שהתקבלו בכיתה משולשים שונים. דבר זה מחזק את תחושת הנכונות, אף שאינו נחוץ. הסיבה שאינו נחוץ הוא בגלל שילוב הוכחה כללית בכל שלב.