

יחידה 13 – לקראת משפט פיתגורס

מציאת קשרים בין שטחי ריבועים הבנויים על צלעות משולש ישר זווית ושווה שוקיים.

מה ביחידה?

- מוכיחים כי אם מחברים בזה אחרי זה אמצעי צלעות של ריבוע, המרובע הפנימי אף הוא ריבוע.
 - חוקרים ומוכיחים מקרה פרטי של משפט פיתגורס, כאשר המשולש שווה שוקיים.
- יחידה זו מהווה שלב בבניית משפט פיתגורס אותו נוכיח ביחידה הבאה ונוסיף למבנה הגאומטריה.

מבנה היחידה

יחידה זו מיועדת לשיעור אחד. במקרה שלא מספיקים את משימה 6, נצרף את המשימה ליחידה הבאה.

חלוקה לנושאים

ריבועים מריבועים	משימות 4-1: יצירת ריבועים הגדולים או קטנים פי 2 זה מזה, והקשר בין שטחי ריבועים החסומים בתוך ריבועים. בודקים אם נוצרים ריבועים, ומוכיחים.
פיתגורס, במשולש ישר זווית שווה שוקיים	משימה 5: חקירת משולשים ישרי זווית ושוקיים, תוך שימוש ברשת מתאימה, לבניית הריבועים שעל הצלעות. משימה 6: הוכחת המשפט: סכום שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר, לגבי המקרה הפרטי, בו המשולש שווה שוקיים.



שיעור זה מהווה הכנה למשפט פיתגורס. ההכנה קשורה גם לחקירה וגם להוכחה. מוכיחים שמרובע המתקבל מחיבור נקודות על צלעות ריבוע הנמצאות במרחק שווה מקדקוד הוא ריבוע, כהכנה להוכחה. חוקרים את הקשר בין סכום שטחי הריבועים על הניצבים ושטח הריבוע שעל היתר למקרה פרטי של משולש ישר זווית ושווה שוקיים, כהכנה להכרת המשפט.

חומרי עזר ליחידה

לכל קבוצה: חמישה ריבועים חופפים שצלעם 9 ס"מ. מספריים.	משימה 1
להצמדה ללוח: שרטוטים כמו משימה 2א' ו-3ד' בהגדלה (מצורפים) שרטוט כמו השרטוט במשימה 6 בהגדלה (מצורף).	משימות 2-3 משימה 6

שיעורי בית

משימות 2-1	שרטוט ריבועים ברשת (משימה אחת מביניהן).
משימות 7-3	יישום משפט פיתגורס למקרה של משולש שווה שוקיים (שתי משימות).
משימות 9-8	שטחי ריבועים המתקבלים על-ידי חיבור אמצעי צלעות של ריבוע (משימה אחת).

מטרת היחידה

הכנה למשפט פיתגורס.

מהלך היחידה

השיעור עוסק בהכנה למשפט פיתגורס, תוך מתן התייחסות לידע הנדרש להוכחה, וליצירת מוטיבציה. כלומר:

- הוכחות קודמות אשר עליהן מסתמך משפט פיתגורס.
 - הוכחת המשפט במקרה פרטי (ליצירת עניין).
- בהמשך, עיקר הפעילות היא של תרגול ויישום.

משימות 1-2 פותחות את השיעור במליאה. במשימה 1 מפעילים את התלמידים בקבוצות או זוגות לחיזוק **החוש לריבועים** ולשטחים של ריבועים המורכבים מחלקי ריבועים. פעילות זו תורמת הן להוכחת המשפט במשימה 2, והן לחקר בהמשך.

משימות 3-4 מציגות ריבועים נוספים אשר קדקודיהם על צלעות ריבוע במרחקים שווים מהקדקודים. אפשר ללמד את החומר גם אם מדלגים על המשימות. חשיבותם בעיקר בפיתוח חוש **לשינוי** בשטחי הריבועים מסוג זה, מהו הריבוע הפנימי הגדול ביותר, הקטן ביותר, וכו'. משימה 4 מהווה דיון במליאה בעקבות הפעילות במשימה שלפניה, בקבוצות או זוגות.

משימות 5-6 עוסקות במקרה פרטי של משפט פיתגורס. במשימה 5 חוקרים התלמידים בעזרת שרטוטים וספירת **משולשי יחידה** את הקשר בין הריבועים שעל הצלעות של משולש ישר זווית ושווה שוקיים. פעילות זו מחזקת אף היא את החוש לצורות ושטחים.

הכללה למשימה זו והוכחת המסקנה שהתקבלה, ייעשו במליאה במשימה 6. סעיף א של משימה 6, מהווה חזרה על סעיף ד במשימה 5, אך **במספרים שונים**.

סעיף ב עוסק בהוכחה. ההוכחה פשוטה, והיא למעשה הכללה של החישוב. זוהי הזדמנות להוכיח דבר **בעל משמעות**, אשר ההוכחה שלו פשוטה ומובנת לכל.

העיסוק בגזירה והצמדה מפתח יכולת לזהות שהצורה שהתקבלה היא ריבוע ומהו שטחו.

חשוב שתלמידים שלמדו במשימה הקודמת ששטח הריבוע המחבר אמצעי צלעות של ריבוע הוא חצי משטח הריבוע המקורי, יבינו מדוע שטחי שאר המרובעים גדולים יותר. ככל שנתקרב יותר לקדקודי הריבוע המקורי, כך השטחים של הריבועים החדשים יתקרבו לשטח של הריבוע המקורי.

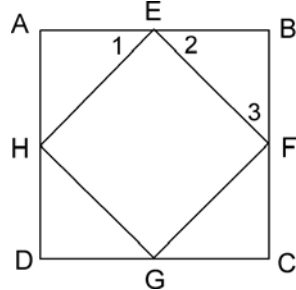
משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים, הקטנים ביותר אשר מצויים ברשת עליה משרטטים.

כאשר מתייחסים במליאה לסעיפים בהם טיפלו ביחידים או בקבוצות, רצוי לעשות זאת בשנוי. התייחסות ישירה, בעיקר בסעיפים שאולי לא כולם פתרו, עשויה לשעמם את אלו שפתרו בהצלחה, או לתסכל את אלו שלא הגיעו לסעיף.

המשמעות נובעת מכך שחקרנו ומצאנו תכונה ועכשו יש צורך להוכיח אותה.

הוכחת המשפט בדבר מרובע המחבר אמצעי צלעות ריבוע.

- משפט: אם מחברים בזה אחר זה אמצעי צלעות ריבוע המרובע הפנימי המתקבל הוא ריבוע.
- ההוכחה מבוססת על כך שארבעת המשולשים ישרי הזווית שהתקבלו הם חופפים ומכאן נובע שהצלעות של המרובע שוות זו לזו. הזוויות של המרובע ישרות כי כל אחת מהן משלימה שתי זוויות חדות של משולש ישר זווית ל- 180° .



נתון: ריבוע ABCD

H; G; F; E אמצעי הצלעות

(כלומר: $BF = FC = \frac{1}{2}BC$, $AE = EB = \frac{1}{2}AB$)

($DG = GC = \frac{1}{2}CD$, $AH = HD = \frac{1}{2}AD$)

צריך להוכיח EFGH ריבוע, (כלומר $HE = EF = FG = GH$), ויש זווית ישרה, למשל $\angle HEF = 90^\circ$)

ימוקים

כל הצלעות בריבוע שוות

עובדות

$$AB = BC = CD = DA$$

הוכחה:

$\Downarrow$

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}DA$$

חצאים של גדלים שווים

$$AE = BF = CG = DH$$

כלומר:

$$EB = FC = GD = HA$$

וגם

זוויות בריבוע

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

$\Downarrow$

$$\triangle AEH \cong \triangle BFE \cong \triangle CGF \cong \triangle DHG$$

$\Downarrow$

$$EF = FG = GH = HE$$

משולשים השווים בשתי צלעות ובזווית שביניהם.

צלעות מתאימות במשולשים חופפים.

סכום זוויות חדות במשולש ישר זווית.

זוויות מתאימות במשולשים חופפים.

$$\angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$\angle 1 = \angle 3$$

$\Downarrow$

$$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

$\Downarrow$

$$\angle HEF = 180 - (\angle 1 + \angle 2) = 180 - 90^\circ = 90^\circ$$

$\Downarrow$

מרובע שכל צלעותיו שוות, ויש לו זווית ישרה הוא ריבוע.

המרובע EFGH הוא ריבוע