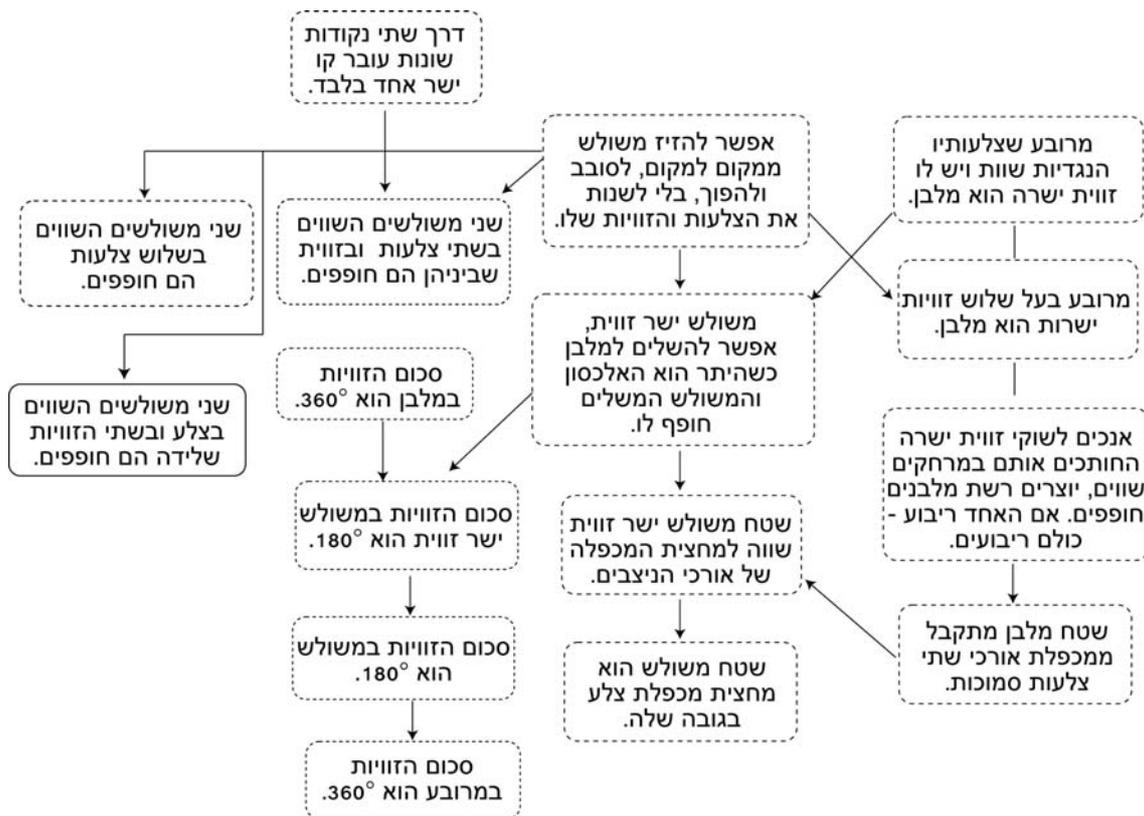


## יחידה 12 – חופפים בהתאמה

משפט חפיפה נוסף. התאמה בין חלקים שווים במשולשים חופפים.

מה ביחידה?

- משפט חפיפה נוסף: שני משולשים השווים בצלע ובשתי הזוויות שלידה – חופפים.
- נוכחים בחשיבות מושג **ההתאמה** בין הגדלים בשני משולשים חופפים.



## מבנה היחידה

יחידה זו מיועדת לשלושה שיעורים.

### חלוקה לשיעורים

שיעור ראשון	משפט החפיפה ז.צ.ז. משימות 1-2 מהמהלך. שיעורי בית: מתוך האוסף, משימות 1-2.
שיעור שני	סדר והתאמה בחפיפה: משימות 3-6. שיעורי בית מתוך אוסף, משימות 3-4.
שיעור שלישי	יישומים: משימות 7-9. שיעורי בית מתוך האוסף, משימות 5-6.

### חלוקה לנושאים

עוד משפט חפיפה	<b>משימה 1:</b> הקשר בין חפיפה לקבלת משולש יחיד. <b>משימה 2:</b> משולשים השווים בצלע ובשתי זוויות שלידה, חופפים.
סדר והתאמה בחפיפה	<b>משימות 3-4:</b> זיהוי ההתאמה בחפיפה. <b>משימות 5-6:</b> מציאת שוויון של צלעות וזוויות, והשלמת מידות במשולשים חופפים.
יישום	<b>משימה 7:</b> זיהוי משפטי חפיפה במשולשים ישרי זווית, דגש על כתיבה נכונה. <b>משימה 8:</b> השלמת גדלים על סמך חפיפת משולשים. <b>משימה 9:</b> זיהוי משולשים חופפים על סמך גדלים נתונים של צלעות ו/או זוויות.

### חומרי עזר לשיעור

<b>משימה 1</b>	להצמדה ללוח: שרטוט קו המזח (ליצור משני החלקים של מאיר ושלמה), סירה (מצורפים). רצועות לבניית הזוויות (הכנה עצמית).
<b>משימה 2</b>	משולש ABC מוגדל (מצורף ביחידה 10). משולשים השווים בצלע ושתי זוויות אך אינם חופפים, מתאימים למשימה 2 סעיף ג' (מצורפים). משולשים גדולים לדיון משותף מתאימים למשימה 2 סעיף ד' (מצורפים).

### שיעורי בית

<b>משימות 2-1</b>	זיהוי ההתאמה (סדר הקדקודים) של משולשים חופפים.
<b>משימה 3</b>	משולשים חופפים ישרי זווית.
<b>משימה 4</b>	משולשים חופפים עם צלע משותפת.
<b>משימות 5-6</b>	משולשים חופפים על-פי מידות של צלעות ו/או זוויות.

## מטרת היחידה

- משפט החפיפה על-פי ז.צ.ז. ככלי להבנת הצורך בשמירה על סדר הנתונים.



לפני שנלמד המשפט, על חפיפת שני משולשים השווים בצלע ובזוויות שליטה, אין משמעות לשימוש במילה **התאמה**. כלומר, האמירה ששני משולשים שווים בגדלים מסוימים **בהתאמה** אינה משמעותית לתלמידים.

## מהלכי השיעורים

### שיעור 1

השיעור הראשון הוא המרכזי ביחידה זו. בשיעור זה מוקנים שני עקרונות בסיסיים:

- כאשר הנתונים לגבי משולש מאפשרים לבנות משולש יחיד, נתונים אלו מבטיחים חפיפה.
- חשיבות ההתאמה בחפיפה.

בהמשך עיקר הפעילות היא של תרגול ויישום.

**במשימה 1** מראים כי צלע ושתי הזוויות של שני משולשים שרטוט יחיד של המשולש, ומכאן משפט החפיפה לפי זווית, צלע, זווית. פותחים בהצמדת קו ללוח המתאר מזה. כדאי לצייר גם גלי ים. פותחים ב**בסיפור** על שני ילדים המשקיפים על סירה. הסיפור מתפתח במקביל להצמדה על הלוח של האביזרים המתאימים, כמו בעמוד 95 בספר.

מצמידים רצועה ממקומו של מאיר, בזווית הנתונה.

שואלים: יש לי סירה מי רוצה לשים אותה? בדרך כלל יניח אותה התלמיד **באחד המקומות** לאורך הרצועה או בסופה.

מבקשים: האם יש עוד מקום מתאים?

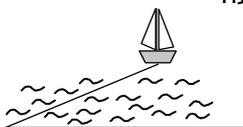
ייתכן שהתלמיד יזיז את הסירה למקום אחר לאורך הרצועה, אך ייתכן גם שישגה, ויזיז אותה **במקביל למזח**. בכל מקרה נשאל את תלמידי הכיתה לנכונות המקום.

ממשיכים ומספרים, שאותה סירה נצפתה על-ידי שלמה שעמד בקצה השני של המזח בזווית מסוימת, אותה ממחישים על-ידי

**רצועה נוספת**. דנים היכן הסירה צריכה להיות. התלמיד שיזיז את הסירה גם יראה על-ידי המשך סימון הרצועות בקו מקווקוו, את מקום מפגש.

כדי להפנים את התהליך, נבנה עם התלמידים כל שלב בסיפור ונערב אותם באפשרויות הבנייה.

התלמידים נוטים להניח בקצה הרצועה



גם אם לא ישגו, רצוי ליזום הזזה כזו ולשאול אם המקום של הסירה מתאים. חשוב גם לדון בהזזה של הסירה **בהמשך** הרצועה.

כדאי שהרצועות תהיינה קצרות ולא תפגשנה. הצורך להאריך אותן ידחה תשובה מיידית, ויבהיר היטב את ענין נקודת החיתוך.

דנים האם הפעם יש יותר ממקום אחד.

המקום יחיד, כי עליו להיות על שוקי כל אחת מהזוויות.

בשלב זה התלמידים רואים את יחידות הפתרון. כדי שהתלמידים יבינו שיחידות הפתרון מבטיחה חפיפה צריך לבנות משולש נוסף לפי אותם תנאים. משרטטים קטע באורך המזח. בונים את הזוויות ושואלים אם נמשיך כדי לקבל את מקום הסירה, האם יתקבל אותו משולש? עומדים על כך שלא משנה היכן משרטטים את המשולש, נקבל תמיד אותו משולש. נשאל: מה הקשר בין שני המשולשים? מכאן עוברים לניסוח משפט חפיפה זה כתנאי מספיק לחפיפת משולשים. חשוב לשים לב גם לסדר של הצלע והזוויות, כלומר הצלע בין שתי הזוויות.

לתלמידים אין זה ברור מאילו שפתרון יחיד מבטיח חפיפה.

בשלב זה יהיו תלמידים רבים שיאמרו שהמשולשים חופפים.

מכאן אפשר להמשיך ישירות למשימה הבאה.

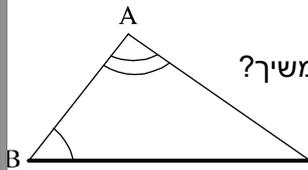
כמו במקומות אחרים השימוש בשאלת "מה אם" תורם הן לעניין והן לקישור עם הנושא הקודם.

נשאל: ומה אם שתי הזוויות לא יהיו ליד הצלע?

**משימה 2** עוסקים במצבים שונים בהם יש צלע ושתי זוויות השווים בשני משולשים. בסעיף ב' בודקים אפוא את המצב בו נתונים שני משולשים השווים בצלע, בזווית שלידה ובזווית שאינה ליד הצלע. מצירים משולש, מדגישים צלע נניח BC וזוויות A ו-B.

נבחר קטע שיהיה שווה ל-BC.

האם נוכל להמשיך?



נבנה בקצה זווית שווה ל-B, אך איך נמשיך?

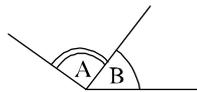
מה חסר? (הזווית C) האם יש דרך

למצוא את זווית C?

ביצוע ברור של העתקת הזוויות והנחתן זו ליד זו חשוב כדי להבהיר לתלמידים שהזוויות מחוץ למשולש הן אלו שהיו בתוכו.

מעתיקים על שקפים את הזוויות A ו-B.

מניחים אותן זו ליד זו כך:



שואלים: איך נגלה מהי C?

אם אין הצעות מהתלמידים, נסמן על הלוח קו

אופקי ונניח עליו את השקפים כך:



מה תוכלו לומר על הזווית השלישית שנוצרה?

ייתכן שחלק מהתלמידים יאמרו שהיא צמודה לקודמות. חשוב להבחין בין זוויות צמודות לזוויות שסכומם  $180^\circ$ .

המעבר מכך שזוויות זו משלימה את האחרות ל- $180^\circ$ , לעובדה שהיא הזווית השלישית במשולש, אינו ברור מאילו.

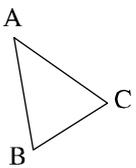
מה הקשר של השרטוט לזוויות במשולש?

משלימים את הבנייה בעזרת העתקה בנקודה C של הזוויות שמצאנו.

השאלה זורקת אור על השגיאה האופיינית ומערבת את התלמידים בנעשה, לפי הסדר.

ההכנה לתרגול נעשתה בסעיף ד של המשימה האחרונה בשיעור הקודם. אם הסעיף לא נעשה או שלא טופל דיו, אפשר לפתוח את השיעור בבדיקת שיעורי הבית במשימות 1 ו-2 סעיף ג.

נבקש שיסבירו מילולית מדוע:  
 $\triangle CAB \cong \triangle BAC$   
 וישלימו לשם ההוכחה את השוויונים:  
 AB = -----  
 AC = -----  
 BC = -----



מכאן שהמשולשים חופפים לפי...  
 ולכן מתקיים שוויון הזוויות:  
 \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

בסעיף ג' מטפלים בצורך בהתאמה. מצמידים ללוח שני משולשים מתאימים (מצורפים), ושואלים אלו חלקים שווים. שואלים אם המשולשים חופפים. יש להניח שחלק מהתלמידים יאמרו כן ואחרים לא. **שואלים:** למה לא? הרי יש צלע ושתי זוויות? האם צריך לבדוק עוד משהו?

דנים במשמעות של שווים בהתאמה. לחיזוק ההבנה כדאי לשלב גם בדיקה עם נתונים מספריים. סעיף ד' מתרגל את ביצוע ההתאמה.

## שיעור 2

**במשימות 3-5 מתרגלים** את המעבר מזיהוי המשולשים המשורטטים כחופפים לזיהוי האותיות המתאימות של קדקודים מתאימים במשולשים. במשימה 3 יוצאים מהמשולשים לזיהוי הקדקודים המתאימים. במשימה 4 יוצאים משמות המשולשים החופפים לזיהוי הקדקודים המתאימים. במשימה 5 מוסיפים גם רישום שוויונים של צלעות וזוויות שוות.

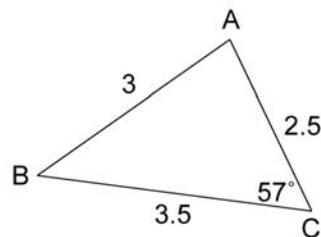
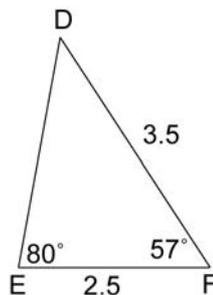
אם יש די זמן אפשר לפני משימה 6 להוסיף הוכחה של **שוויון זוויות הבסיס** במשולש שווה שוקיים על סמך חפיפת המשולש לעצמו, בשינוי סדר הקדקודים.

לחילופין אפשר לתת תרגיל זה לתלמידים זריזים בלבד, כהמשך למשימה 5.

**משימה 6** דנה בחפיפה או אי-חפיפה במשולשים ישרי-זווית. במקרים אלו יש נתון נוסף, הזווית הישרה שיש להשתמש גם בו.

## שיעור 3

בכיתה הזקוקה עדיין לתמיכה, אפשר לפתוח את השיעור בשיגור. מצירים שני משולשים חופפים (לפי אחד המשפטים) ורושמים מידות שיבטיחו חפיפה. לדוגמה:



רצועת הנייר ניתנת לקבוצה של תלמידים היושבים סמוך זה לזה, גם אם הלימוד לא נעשה בקבוצות. התלמידים מוצאים את כל השיויונים ובחרים להציג אחד, אותו ירשמו בגדול ובטוש עבה על רצועת הנייר. מתוך הרצועות שהכינו בכיתה, בוחרים בשלוש המציגות את השיויונים הדרושים, ומצמידים ללוח.

בחלק מזוגות המשולשים יש 3 נתונים שווים, אך המשולשים לא חופפים כיוון שאינם באותו סדר.

נותנים רצועת נייר לכל קבוצה של תלמידים, ומבקשים לרשום עליה שוויון אחד, של צלעות או זוויות. אוספים את השיויונים

$$AB = DF$$

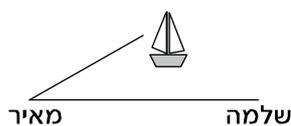
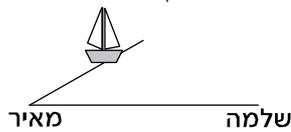
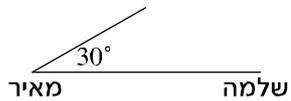
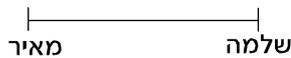
$$\sphericalangle C = \sphericalangle F$$

$$BC = EF$$

מבקשים להשלים את חפיפת המשולשים  $\triangle ABC \cong \underline{\hspace{2cm}}$  וכן לרשום על כל משולש את אורכי הצלעות וגודל הזוויות.

עובדים **במשימות 7-8** בקבוצות בזוגות או ביחידים. במשימות אלו מיישמים את הנלמד לגילוי משולשים חופפים. מסכמים במליאה בעזרת **משימה 9**. במשימה זו מושם דגש על **התאמה**.

דיון סביב משפט החפיפה לפי צלע ושתי הזוויות שלידה מורה: אני רוצה לספר סיפור. מאיר ושלמה... (מספרת לפי עמוד 95) מאיר ושלמה צופים בים.



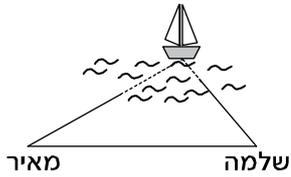
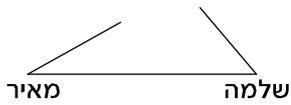
מאיר מסתכל על סירה בזווית של  $30^\circ$ . מחברת למבחן על הצלעות, קו צלע, הזווית המתאימה.

מורה: יש לי סירה, מי רוצה לשים אותה? תלמיד 1 מניח צלע שוק הזווית

מורה: ייתכן עוד מקום? ת2: אפשר להזיז.

מורה: תראה היכן. תלמיד 2 מניח את הסירה בצידה.

תלמידים במקהלה: לא, צריך על הקו מורה: היכן? ת3: אפשר גם להמשיך את הקו.



מורה מציינת בהמשך השקף קו מקווקוו.

מורה: שלמה מסתכל על אותה סירה בזווית של  $40^\circ$

מוסיפה שקף

מ: מי מוכן להראות היכן הסירה?

תלמיד ניסע וממשיך את הקווים (מקווקוו)

לא כל כך באופן ישר, המורה "מסדרת"

שקף יהיה ישר.

מורה: קבלנו משולש יחיד.

אם נרצה עוד פעם לקחת משולש שצלעו שווה ל-AB

(מסמנת את מקומו של מאיר ב-A ושל שלמה ב-B)

וניקח את הזוויות, מה תוכלו לומר על המשולשים?

ת3: חופפים

מורה: ראינו שאפשר לקבל רק משולש אחד, ולכן לא משנה איפה נבנה. לפי נתונים אלו נקבל תמיד

אותו משולש.

ת4: אז גם זה תנאי מספיק

מורה: איך נקרא לו?

ת: ז.צ.ז כי הצלע בין שתי זוויות



1. הבנייה המשותפת עם הכיתה, כאשר תלמידים שונים מניחים את הסירה ומזיזים אותה, וכולם שותפים

לעשייה ממחישה היטב את העובדה שיש לסירה רק מקום אחד.

2. המעבר מקבלת משולש יחיד לחפיפת משולשים דורש הבהרה לתלמידים.

3. שימוש בשפה מתמטית מרגיל את התלמידים להשתמש בה. כאן ראינו שתלמיד שנחשף בשיעורים קודמים

לשימוש ב"תנאי מספיק", משתמש בו מיוזמתו.