פתרון בעיות מילוליות ללא משוואות

תקציר

כיצד פתרו בעיות מילוליות, הניתנות בימינו לתרגום למשוואה מהצורה $ax = b$, בזמנים בהם לא היו כלים לבנות משוואה כזו? השיטה המוצגת במאמר נקראת *Rule of False Position* *(השיטה של ההצבה השקרית)*.

באמצעות השיטה והשימוש בה לפתרון בעיות, נדגים שני רעיונות מרכזיים:

א. המתמטיקה היא תחום דינמי המתפתח כל הזמן, שבו נוצרות טכניקות חדשות לפתרון בעיות.

ב. הסימול המתמטי מפשט, בדרך-כלל, תהליכי פתרון בעיות, ויכול לתרום גם להבנה מתמטית.

מבוא

בשטף החיים היומיומיים אנו שוכחים לעיתים באיזו מהירות משתנה סביבתנו. מכשירים שהתרגלנו אליהם כגון טלוויזיה, נגן תקליטורים ומחשב ביתי, לא היו קיימים עד לפני דור או שניים. האם בכל תחום חלים שינויים? או שמא יש דברים שאינם משתנים? מה בקשר למתמטיקה? 2 ועוד 2 היו, וכנראה תמיד יהיו, 4.
אך גם במתמטיקה חלים שינויים כל הזמן, והם משפיעים הן על חומר הלימוד והן על שיטות הלימוד.
כיום לומדים בבתי ספר חומר שלפני 300 שנה היה נחלתם של מעטים בלבד, ולפני 150 שנה עדיין נלמד רק באוניברסיטה.
אחת המהפכות המשמעותיות בלימוד המתמטיקה היא השימוש במחשבון. המחשבון הוא פיתוח טכנולוגי **חיצוני** למתמטיקה, המשפיע על המתמטיקה. האם יש התפתחויות **פנימיות** בתוך המערכת המתמטית שהשפיעו על שינויה, או שמא כל השינויים נגרמו על-ידי התפתחויות חיצוניות?
אכן, ישנם שינויים שנגרמו על-ידי התפתחויות פנימיות. אחד הדברים שאנו מקבלים כיום כמובן מאליו הוא **הסימול המתמטי**, אך סימול זה עבר גלגולים רבים בטרם התגבש לצורתו המודרנית. הנה למשל, קטע מספרו של היסטוריון המתמטיקה D.E. Smith(1958).

*"לתלמיד של היום, המצויד בסימול טוב, נראה שלא ייתכן שהעולם היה אי פעם מוטרד ממשוואה כמו $ax + b = 0$. ואולם, כך היה המצב, ובפתרון הבעיה, הכותבים הראשונים, החל מהמצרים, נעזרו בשיטה שהייתה ידועה עד לא מכבר בשם ה**שיטה של ההצבה השקרית**."*

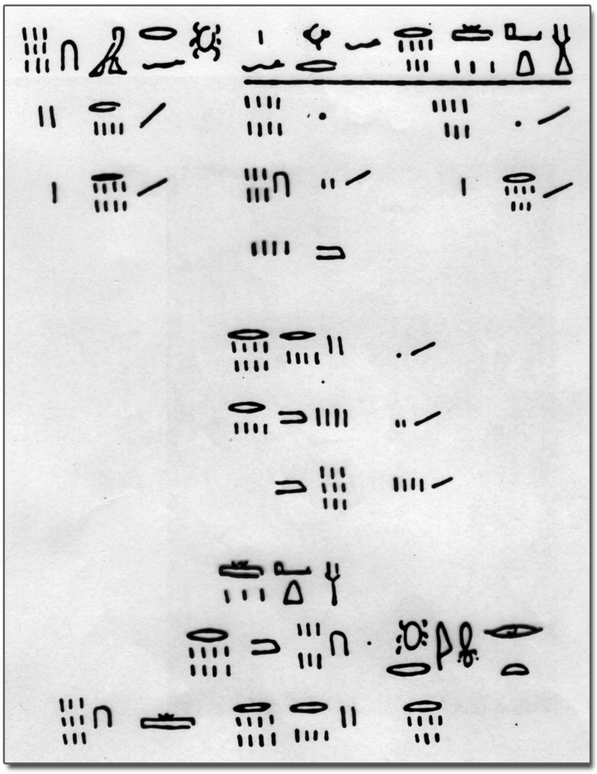
כמובן שלא נוכל להקיף במאמר את כל ההתפתחויות שהתרחשו בתחום הסימול המתמטי. נתרכז בנושא המצוין בקטע של Smith. נראה כיצד פתרו בעיות באלגברה בסיסית לפני שפותח הסימול שאנו מכירים, וננסה להמחיש כיצד קידם אותנו הסימול בו אנו משתמשים.

מצרים העתיקה

בעיה מפפירוס ריינד (Rhind)

אנו מתחילים את מסענו במצרים העתיקה. הפפירוס המצרי, הנקרא על שמו של ריינד (Rhind), הוא אחת מהתעודות המתמטיות הקדומות ביותר (לפי ההערכות הוא בן כ- 3600 שנה). הפפירוס מכיל בעיות מתמטיות רבות וכן את פתרונן.

נתבונן בבעיה מספר 24 בפפירוס ריינד (Chase, 1979).



תמונה 1

הטקסט בכתב ההירוגליפי המופיע בתמונה בשורה הראשונה אינו מובן. עברו שנים רבות עד שהסמלים פוענחו. להלן התרגום שלו:

"כמות ושביעית ממנה, המחוברות יחד, נותנות 19. מהי הכמות?"

כלומר, יש למצוא את המספר, שכאשר נוסיף לו שביעית שלו, נקבל 19.

להלן התרגום של הפתרון לסימון מספרים שאנו רגילים לו:

1	7
$\frac{1}{7}$	1
1	8
2	16
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	1
1	$2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
2	$4\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
4	$9\frac{1}{2}$

היום אנו פותרים בעיה כזו בקלות.
נסמן את הכמות המבוקשת באות x, ונבנה את המשוואה הבאה:

$$x + \frac{1}{7}x = 19$$

כלומר, $\frac{8}{7}x = 19$

נכפול ב- $\frac{7}{8}$ את שני אגפי המשוואה ונקבל $x = 16\frac{5}{8}$.

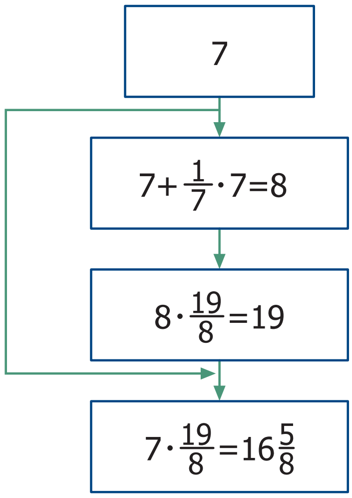
פתרון הבעיה בשיטה המצרית

נתאר לעצמנו שאנו חיים בתקופת המצרים הקדמונים ובמצבם. כלומר, לא עומדים לרשותנו הסמלים האלגבריים ולכן אין אנו יכולים לתרגם את הבעיה למשוואה. (וגם לא היה למצרים הסימון למספרים שמוכר לנו.) נסו להציע דרכים לפתרון לפני שתמשיכו לקרוא.

כיצד פתרו המצרים את הבעיה? (ראו תרשים)

ראשית הם בחרו במספר שקל לחשב $\frac{1}{7}$ שלו, למשל 7, וכאשר הוסיפו לו $\frac{1}{7}$ שלו, כלומר 1, קיבלו 8.

בשלב השני הם חישבו, בדרך מיוחדת ומעניינת, (ראו נספח א) במה יש להכפיל את 8 כדי להגיע ל- 19, וקיבלו את התוצאה $\frac{19}{8}$. בשלב השלישי הם כפלו את הניחוש שלהם 7 ב- $\frac{19}{8}$ ($2\frac{3}{8}$) , ומצאו שהמספר המבוקש הוא $16\frac{5}{8}$. כלומר, אם את ה- 8 שהוא התוצאה של ה"ניחוש" בשלב הראשון יש ל"תקן" על ידי הכפלה ב- $2\frac{3}{8}$ כדי להגיע ל- 19, אזי יש להכפיל את ה- 7 באותו גורם תיקון כדי להגיע למספר המבוקש.



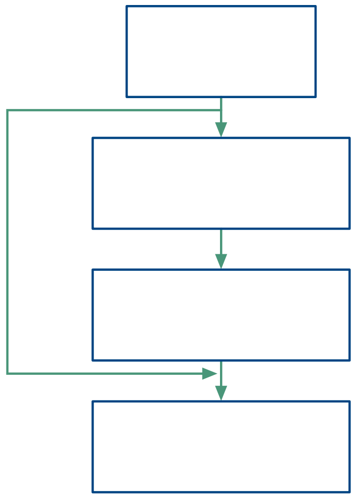
המצרים בחרו בתחילה את המספר 7, כי $\frac{1}{7}$ ממנו הוא מספר שלם.

האם השיטה שלהם "עובדת" עם כל מספר אחר?

נבחר, למשל, בהתחלה את המספר 14, שגם ממנו קל לחשב $\frac{1}{7}$. נמשיך לפתור בשיטה המצרית.
$\frac{1}{7}$ של 14 היא 2 ולכן נקבל, אחרי החיבור, 16. (שימו לב שהיחס 14:7 שווה ליחס 16:8.) יש לכפול את 16 ב- $\frac{19}{16}$ כדי לקבל 19, וכאשר נכפול גם את 14 ב- $\frac{19}{16}$ נקבל $16\frac{5}{8}$ כמו קודם.

כהכנה לחלק הבא מומלץ לפתור את בעיות 25, 26 ו- 31 מפפירוס ריינד בשיטה המצרית. (אפשר להיעזר בתרשים.) שימו לב שבתור מספר התחלתי יכולים להציע הרבה אפשרויות, גם מספרים שליליים.

בעיה 25. "כמות ומחצית ממנה, המחוברות יחד, נותנות 16. מהי הכמות?"
בעיה 26. "כמות ורבע ממנה, המחוברות יחד, נותנות 15. מהי הכמות?"
בעיה 31. "כמות, $\frac{2}{3}$ ממנה, $\frac{1}{2}$ ו- $\frac{1}{7}$ שלה מחוברים יחד ומתקבל 33. מהי הכמות?"



מהי תכונתו של המספר, שאותו כדאי לבחור בשלב הראשון לפתרון בדרך המצרית?

הכללת הניחוש בשיטה המצרית

נחזור לבעיה 24 מפפירוס ריינד. מה קורה אם היינו בוחרים בהתחלה את המספר 9, או 23, או 17? יכול להיות שהשאלה הזאת לא הטרידה את המצרים והם הסתפקו בכך שהשיטה פתרה את הבעיה הנתונה. מסתבר שהשיטה אכן עובדת עם כל מספר (מלבד 0). קשה להסביר במילים מדוע, אך אם נשתמש בסימול המתמטי הנלמד בראשית האלגברה, לא נתקשה להכליל את השיטה לכל a.

1. נסמן את המספר שבחרנו בהתחלה ב- a.
2. כאשר מוסיפים לו $\frac{1}{7}$ מקבלים $\frac{8}{7}a$.
3. כדי לקבל 19 עלינו לכפול את $\frac{8}{7}a$ ב- $\frac{19 \cdot 7}{8a}$.
4. כאשר כופלים את a ב- $\frac{19 \cdot 7}{8a}$ מקבלים $16\frac{5}{8}$.

שיטתם של המצרים שונה לחלוטין משלנו. אין בה הגדרת נעלם ובניית משוואה. עם זאת, כפי שראינו, היא אינה מבוססת על ניחוש. דרך הפתרון תיתן תשובה נכונה לבעיה זו ולכל בעיה "דומה", ללא תלות במספר הראשון שנבחר (מלבד 0).

שיטה זו הייתה דרך הפתרון העיקרית לבעיות כאלה במשך מאות שנים. ואולם, איך אפשר לדעת מתי בעיה מסוימת "דומה" לבעיה שראינו, וניתנת לפתרון באותה שיטה? לא מצאנו במקורות אפיון ברור ופשוט לבעיות הניתנות לפתרון בדרך זו.
כפי שראינו, שיטת הפתרון פועלת עבור בעיות שבהן היחס שבין ההצבות הראשוניות שווה ליחס שבין התוצאות המתקבלות מהן. בבעיה 24 למשל, ההצבה 7 נתנה את התוצאה 8, והצבת מספר גדול פי שניים (14) נתנה תוצאה גדולה פי שניים (16).

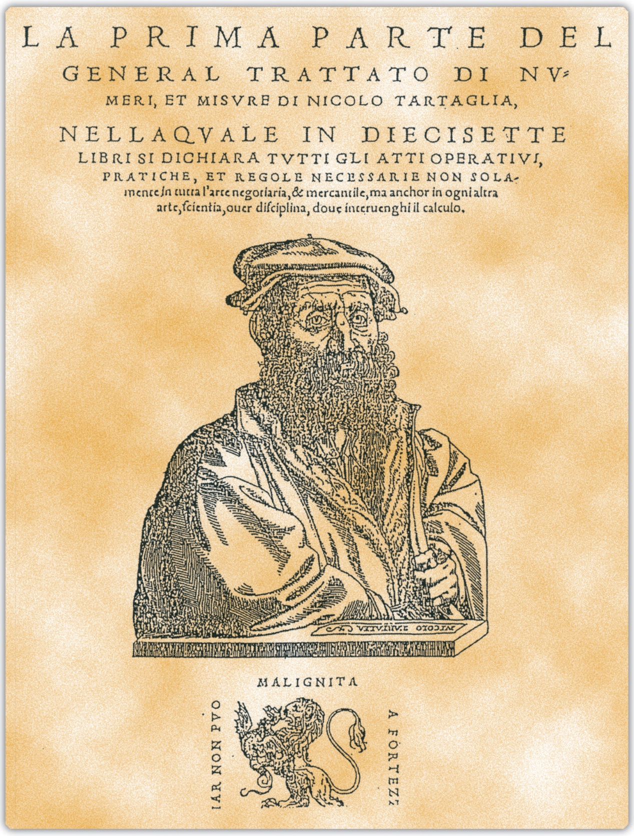
יש להדגיש כי ייתכנו מקרים שבהם היחס בין שתי הצבות והיחס שבין התוצאות המתקבלות מהן שווה, ובכל זאת הבעיה אינה ניתנת לפתרון בשיטה שראינו. כלומר, התנאי הכרחי אך לא מספיק. הניסוח המדויק הוא: *שאלה, אשר התרגום האלגברי שלה לפני פישוט הוא* $ax + bx + \ldots + mx = p$*, ניתנת לפתרון על-ידי השיטה המצרית.* (בהמשך, נפגיש את בעית הדג של קלנדרי שאינה מצורה זו.)

כיום, בזכות הסימול המודרני, אנו יכולים לאפיין תכונה זו בפשטות. שיטת הפתרון של המצרים פועלת רק כאשר תנאי הבעיה ניתנים להצגה כמשוואה מהצורה $ax = b$, כאשר a ו- b הם המספרים הנתונים בבעיה. בסוף המאמר נראה את ההצדקה לשיטת הפתרון המצרית.

ימי הביניים

ניקולו טרטליה (Nicolo Tartaglia)

אנו עוזבים את המצרים וקופצים לימי הביניים. אך לפני שנעשה זאת, נזכיר שגם ההודים וגם הערבים השתמשו בשיטה שתיארנו לפתרון בעיות מסוג זה.
ניקולו טרטליה (Nicolo Tartaglia) חי באיטליה במאה ה- 16, והיה אחד המתמטיקאים המפורסמים באותה תקופה. מסופר שבהיותו ילד נפצע בפניו, ופציעה זו, כפי הנראה, גרמה לו לקשיים בדיבור, ומכאן הכינוי Tartaglia, שפירושו "המגמגם".



בתמונה רואים את עמוד השער בספר **אריתמטיקה** של ניקולו טרטליה, תרגום כותרת הספר: "חלק ראשון (מתוך 17) של לימוד מספרים ואמצעי מדידה. כל הכללים לשימוש בכלכלה, חשבונאות, מסחר אוניות, והיכן שיש צורך לעשות חשבון".

לפנינו בעיה מתורגמת המופיעה בספר האריתמטיקה של טרטליה.

"שלושה שותפים רוצים להקים חברה (כדי לעבד צמר כבשים). הם עושים חשבון שכדי להתחיל את החברה, דרושים לפחות 1,000 דוקטים (מטבע איטלקי קדום).
השותף השני מוכן להשקיע פי שניים ממה שמשקיע הראשון, והשלישי מוכן להשקיע פי שלושה ממה שמשקיע השני.
כמה צריך כל אחד מהם להשקיע בחברה זאת, אם הם רוצים שהסכום של שלושתם ביחד יהיה 1,000 דוקטים?"

כיצד אנו פותרים היום בעיה כזו?
נסמן ב- x את מספר הדוקטים שמשקיע הראשון. לכן, $2x$ הוא מספר הדוקטים שמשקיע השני, ומספר הדוקטים שמשקיע השלישי הוא $6x = 3(2x)$.

נקבל את המשוואה: $x + 2x + 6x = 1000$

או $9x = 1000$

לכן: $x = 111\frac{1}{9}$.

לפיכך, מספר הדוקטים שישקיע הראשון הוא $111\frac{1}{9}$, השני ישקיע $222\frac{2}{9}$ דוקטים, והשלישי ישקיע $666\frac{2}{3}$ דוקטים.

אנו רואים שאפשר ל"תרגם" את הבעיה למשוואה מהצורה $ax = b$, ולכן היא ניתנת לפתרון בשיטה המצרית.
ואכן, כ- 3,000 שנה אחרי המצרים, משתמש טרטליה באותה שיטה! אך הוא טורח להסביר במילים כל שלב.

הפתרון של טרטליה

שלב ראשון: ניחוש

"פתור את הבעיה בשיטה כזאת, שהשותף הראשון משקיע סכום כלשהו לפי רצונך...
כעת, נניח שהראשון משקיע 100 דוקטים..."

שלב שני: הפעלת תנאי הבעיה

"... כיוון שבמקרה שלנו הסכום של שלושת החלקים, כלומר 100 הדוקטים, 200 הדוקטים ו- 600 הדוקטים, נותנים רק 900 דוקטים ולא את 9000 הדוקטים הנתונים, הצבתנו לא הייתה נכונה. בכל זאת בעזרת טעות זאת נוכל למצוא את האמת."

שלב שלישי: מציאת הפתרון

"... אם 900 דוקטים נובעים מ- 100, 200 ו- 600 דוקטים, ממה ינבעו 1000 דוקטים?

עבוד לפי הכלל, ותמצא כי הראשון צריך להשקיע $111\frac{1}{9}$ דוקטים, השני $222\frac{2}{9}$ דוקטים, והשלישי $666\frac{2}{3}$ דוקטים...".

כפי שרואים, בשלב הראשון טרטליה בוחר מספר "נוח", ומניח שהראשון צריך להשקיע 100 דוקטים. מתוך תנאי הבעיה נובע שהשני צריך להשקיע 200 דוקטים, והשלישי 600 דוקטים.

סך כל ההשקעה היא $100 + 200 + 600 = 900$.

כיוון שהסכום שיושקע צריך להיות 1,000 דוקטים, יש לכפול את 900 ב- $1\frac{1}{9}$. כאשר נכפול את 100, 200 ו- 600 ב- $1\frac{1}{9}$, נקבל בהתאמה $111\frac{1}{9}$ ו- $222\frac{2}{9}$ ו- $666\frac{2}{3}$, שהם הסכומים המבוקשים.

פיליפו קלנדרי (Filippo Calandri)

נראה דוגמה נוספת. המתמטיקאי האיטלקי פיליפו קלנדרי (Filippo Calandri) חי לפני טרטליה. הוא פרסם את ספרו **האריתמטיקה** בשנת 1491. זהו כנראה הספר הראשון שבו הופיעו גם ציורים להמחשת השאלות. לדוגמה, בתמונה מתוך הספר אנו רואים ציור הקשור לבעיה של מילוי אמבטיה. (האמבטיות אולי השתנו מאז אבל הבעיות המשיכו להופיע בספרי לימוד.)

בספר של קלנדרי מופיעה הבעיה:

"משקל ראש הדג $\frac{1}{3}$ ממשקל כל הדג, משקל הזנב $\frac{1}{4}$ [מהמשקל הכללי], ומשקל הגוף 30 אונקיות [יחידת משקל]. מה משקל הדג?"

כיום אנו פותרים בעיה זו כך: נסמן ב- x את משקל הדג, לכן משקל הראש הוא $\frac{1}{3}x$, ומשקל הזנב הוא $\frac{1}{4}x$. המשוואה שנקבל היא:

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + 30 = x$$

$$\frac{7}{12}x + 30 = x$$

$$30 = \frac{5}{12}x$$

$$72 = x$$

המשוואה $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + 30 = x$ אינה מהצורה שלגביה אמרנו כי היא ניתנת לפתרון על-ידי שיטת ההצבה השקרית. למרות שהבעיה לא נראית ממבט ראשון דומה לבעיות הקודמת, בעזרת הסימול האלגברי אפשר להראות, בקלות יחסית, שגם היא מהצורה $ax = b$.
אז כיצד פתר קלנדרי את הבעיה?
הוא השתמש בדרך הפתרון, שהעיקרון שלה עכשיו כבר מוכר לנו. נניח שמשקל כל הדג הוא 12 אונקיות. משקל הראש 4 אונקיות, הזנב 3, והגוף 5. אבל, מתוך תנאי הבעיה אנו יודעים שמשקל הגוף צריך להיות 30 אונקיות, כלומר פי 6.
מכאן נובע שמשקל הדג הוא המכפלה של 12 ב- 6; זאת אומרת שמשקל הדג הוא 72 אונקיות. לפי אותו שיקול נכפול את 4 ואת 3 ב- 6 ונקבל שמשקל הראש הוא 24 אונקיות, ומשקל הזנב הוא 18 אונקיות.
מעניין לראות כי קלנדרי בוחר מראש מספר שברור שאינו יכול להיות הפתרון. אם משקל הגוף 30 אונקיות לא ייתכן שמשקל הדג כולו הוא רק 12 אונקיות. הוא מסתמך על העובדה שאפשר לבחור כל מספר בתור המספר הראשון, ולכן הבחירה שלו נועדה לקבל מספרים שלמים במהלך הפתרון, ו- 12 מתחלק ללא שארית ב- 4 וב- 3.

דיון

לפני הסיכום נחזור לשתי בעיות מתוך Greek Anthology (500 לספירה)[1].

”עושה הלבנים! אני ממהר וברצוני להשלים את הבית... יש לי את כל הכמות [של הלבנים] חוץ מ- 300. אתה לבדך יכולת ביום אחד להכין כמות זו. אך בנך גומר 200 [ביום], וחתנך 250. כאשר תעבדו ביחד, בכמה זמן תוכלו לעשות זאת?“

”אני אריה מפליז. מתוך שתי עיניי, פי, וכף רגלי הימנית יוצאים סילוני מים. עיני הימנית ממלאת מיכל ביומיים [יום = 12 שעות], השמאלית בשלושה [ימים], רגלי בארבעה [ימים], ופי ב- 6 שעות. אמור לי, כמה [זמן] נחוץ לארבעתם ביחד למלא את המיכל?“

א. פתרו את הבעיות בעזרת משוואה.
ב. פתרו את הבעיות בעזרת שיטת ההצבה השקרית.

התשובות לשאלות מופיעות בנספח ב׳.

שאלות אלו מראות כי ישנם מקרים בהם נוח לפתור שאלה מסוימת בשיטה הישנה, ולאו דווקא על-ידי בניית משוואה ופתרונה.

נביא בעיה נוספת הלקוחה מתוך ספר מתמטיקה משנת 1815:

”מהו המספר אשר למכפלתו ב- 3 הוסיפו 4, ואת התוצאה חילקו ב- 8, כך שהמנה המתקבלת היא 32?“

נסו לפתור בשתי השיטות והשוו לפני המשך הקריאה.

פתרון בשיטה המצרית

נניח שהמספר המבוקש הוא 4.

$$4$$

$$\frac{4\cdot3+4}{8}=\frac{16}{8}=2$$

$$2\cdot\mathbf{16}=32$$

$$4\cdot\mathbf{16}=\mathbf{64}$$

פתרון בעזרת משוואה

נסמן את המספר המבוקש ב- x

$$\frac{3x + 4}{8} = 32$$
$$3x + 4 = 256$$
$$3x = 252$$
$$x = 84$$

דיון בסתירה

כפי שרואים, הצבה שקרית אינה עובדת עבור הבעיה שהוצגה.
ההצבה השקרית מבוססת על העובדה שיש יחס ישר בין ה"קלט" ל"פלט".
לכן, אם מ- 4 קיבלנו 2, אז מ- 8 צריך לקבל 4.
אבל כשמציבים 8 מקבלים:

$$\frac{8 \cdot 3 + 4}{8} = 3\frac{1}{2}$$

לכן, את הבעיה כפי שהיא מוצגת במשוואה $\frac{3x + 4}{8} = 32$ (1) אי אפשר לפתור בהצבה שקרית (בדומה לבעיית הדג של קלנדרי). הבעיה המתורגמת למשוואה $3x + 4 = 256$ (2), השקולה למשוואה (1), גם היא אינה ניתנת לפתרון בשיטה המצרית.
אך הבעיה הניתנת לתרגום למשוואה $3x = 252$ (3), השקולה למשוואה (1) ולמשוואה (2), ניתנת לפתרון בשיטה המצרית.
השימוש במשוואות נותן הסבר מדויק מתי ניתן, ומתי לא ניתן, להשתמש בשיטה המצרית. אבל יתרונה של השיטה המצרית הוא בכך שמפעילים מיד את תנאי הבעיה על מספר שנבחר, ללא צורך בבניית משוואה, ולאחר מכן "מתקנים" את התוצאה.

הערה: השיטה של ההצבה השקרית התפתחה לשיטה (מסובכת למדי) לפתרון בעיות מהסוג $ax + b = c$ המבוססת אף היא על ניחוש התחלתי שאותו מתקנים (Rule of Double False Position). בעזרתה ניתן לפתור גם את הבעיה לעיל המופיעה בספר משנת 1815.

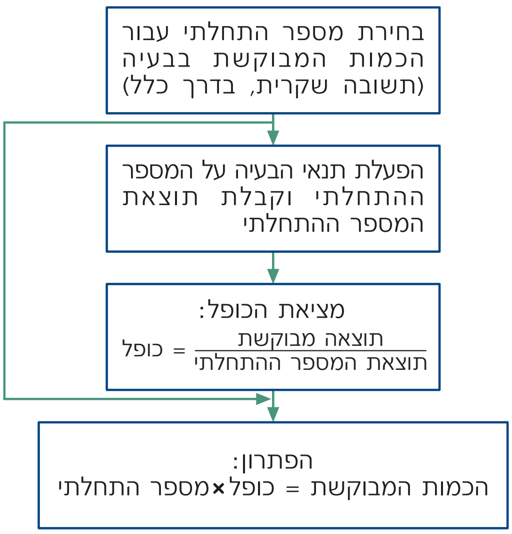
התפתחות הסימול האלגברי – על קצה המזלג

נהוג לחלק את התפתחות האלגברה לשלושה שלבים, לאו דווקא כרונולוגיים (Nesselmann, 1842). האלגברה של השלב הראשון נקראת ***מילולית*** (rhetorical), בשלב זה השתמשו במילים ובמספרים בלבד, ללא סמלים מיוחדים. בשלב השני היא נקראת ***מקוצרת*** (syncopated), ובשלב זה השתמשו בקיצורי מילים. בשלב השלישי היא נקראת ***סימבולית*** (symbolic) וזהו השלב בו משתמשים בסמלים מיוחדים (כמו z, y, x).

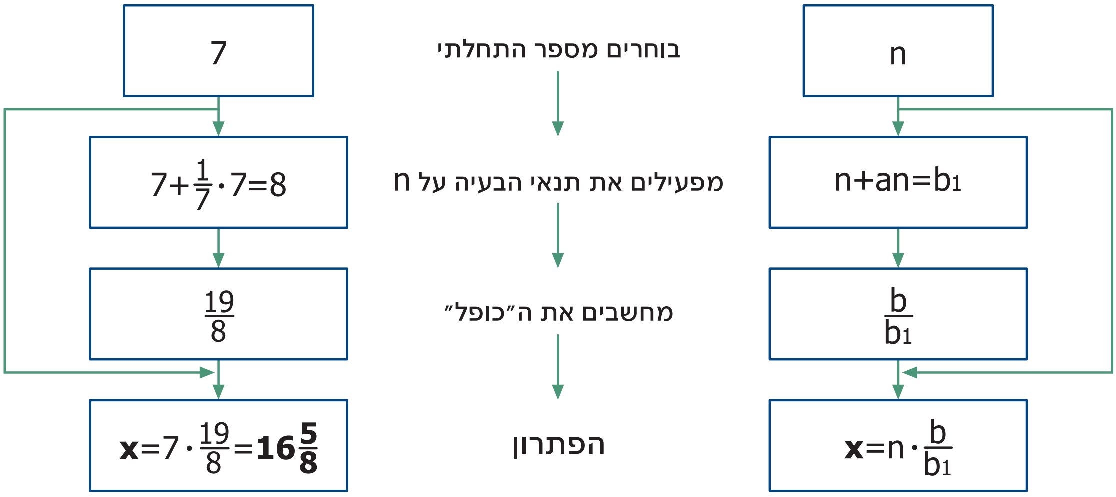
טרטליה, לפני פחות מ- 500 שנה, השתמש עדיין באלגברה *מילולית*, ויכולנו להבחין בקושי ובאריכות הפתרון. גם בתקופתו, ואפילו לפניו, אפשר למצוא דוגמאות של אלגברה *מקוצרת*, אך לא של אלגברה *סימבולית*. זו התגבשה רק ב- 400 השנים האחרונות.

שיטת הפתרון שראינו אצל טרטליה וקלנדרי מבוססת על עיקרון היחס הישר (פרופורציה): באותו מספר, שבו כופלים את תוצאת הניחוש, כדי להגיע למספר הנתון בבעיה, כופלים את הניחוש הראשוני, כדי לקבל את הפתרון האמיתי.

הסברנו לעיל את עיקרון היחס הישר בצורה מילולית. נסביר אותו כעת בשלבים ובעזרת תרשים. לאור הדוגמאות שראינו, ייתכן והתרשים של ההסבר בצורה המקוצרת ברור יותר בתור הסבר, מאשר השימוש במשפטים בלבד.



נתאר כעת את השיטה בעזרת אגלברה סימבולית. הבעיה שלנו היא: הסכום של כמות לא ידועה (x) וחלק שלה נותן תוצאה מבוקשת (b). מהי הכמות? (a) נפתור את בעיה 24 מפפירוס ריינד בדרך שראינו (שיטת ההצבה השקרית). נסמן ב- n את המספר שבחרנו בתור "מספר התחלתי".



התיאור ברור יותר, אך עדיין אין כאן הסבר מדוע השיטה נכונה. נביא הצדקה לשיטת הפתרון בעזרת אלגברה סימבולית.

המשוואה שרוצים לפתור	$ax = b$
המשוואה אחרי הצבת n (ההצבה השקרית)	$an = b_1$
חלוקת אגפי המשוואות בהתאמה	$\frac{ax}{an} = \frac{b}{b_1}$
צמצום ב- a וכפל שני האגפים ב- n מביא לפתרון:	$x = n\cdot\frac{b}{b_1}$

סיכום

שימו לב כיצד הסמלים לא רק עוזרים לנו להבהיר את המהלך, אלא גם מספקים לו צידוק. נוסף לכך, כפי שכבר ציינו, הסמלים מאפשרים לנו להגדיר את סוג הבעיות שעבורן השיטה תקפה. יתרה מזאת, המשוואה ה"קטנה" מכילה הרבה מאוד אינפורמציה. כדי להעריך זאת, ננסה לתרגם למילים את המשוואה האחרונה: הכמות המבוקשת (הנעלם) שווה למכפלה של המספר ההתחלתי ביחס בין התוצאה המבוקשת בבעיה ל"תוצאת המספר ההתחלתי".

השיטה המצרית (הצבה שקרית) לפתרון של בעיות מילוליות הייתה נהוגה בזמנים שבהם טרם נכנס לשימוש הסימול המקובל בימינו. מעניין לציין שלאחר הכנסת סימול הדומה לשלנו, חלה האצה גדולה מאד בהתפתחות המתמטיקה. היעילות של הסימול יכולה להיות אחת הסיבות לכך. ואולם, המתמטיקאים המשיכו להשתמש בשיטת הפתרון שסקרנו גם כאשר כבר היו להם מספיק ידע וכלים לבנייה ולפתרון משוואות. מדוע?

ראשית, בתהליך בניית משוואה יכול להיות קושי. יתרונה של השיטה המצרית הוא שמתחילים ישר בבחירת מספר, ומפעילים עליו את תנאי השאלה, מבלי לבנות משוואה. כל זמן שאין מעוניינים לדעת מדוע ומתי

בדיוק עובדת השיטה, אפשר להסתפק בכך. נוסף לכך, כל שיטה חדשה צריכה ל"הוכיח" את עצמה, ועד שהיא הופכת למובנת וטבעית, אפשר להבין את הדבקות בשיטות הישנות.
בסדנאות למורים שבהם הוצגה שיטת ההצבה השקרית, נמצאו מורים שזכרו את השיטה מלימודיהם בבית הספר היסודי והצביעו על יתרונותיה בפיתוח תובנה כמותית.

רשימת מקורות

Arcavi, A. (1985). *History of Mathematics as a component of mathematics teachers background, Ph. D. Thesis*. Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel.

Chase, A.B. (1979). *The Rhind Mathematical Papyrus*, NCTM, Reston VA.

Nesselmann, G.H.F (1842). Algebra der Griechen, Berlin.

Sanford, V. (1927). *The History and Significance of Certain Standard Problems in Algebra*, Columbia University.

Smith, D.E. (1958). *History of Mathematics*, Vol. 2, Dover.

[1]"האנתולוגיה היוונית" *(The Greek Anthology)* הוא אוסף של אלפי מכתמים ושירים, פרי עטם של כ- 300 מחברים, אשר לוקטו במשך מאות שנים (החל מהמאות הראשונות לספירה). כיום קיים כתב יד אחד שמור בספריה לכתבי יד בהיידלברג שבגרמניה הכולל 15 ספרים תחת השם "האנתולוגיה היוונית". התרגום הראשון לאנגלית יצא לאור לפני כ- 200 שנה באנגליה על-ידי W. R. Paton.

מקריאה באנתולוגיה ניתן ללמוד רבות על חיי היום יום בעת העתיקה. בין מכתמי האנתולוגיה יש יותר מארבעים המתארים בעיות מתמטיות אשר לוקטו, ככל הנראה, על-ידי מטרודורוס (Metrodorus) בסביבות 500 לספירה. ככל הנראה, לבעיות אלה מקורות שונים, חלקם עתיקים מאד, אשר העסיקו את המתמטיקאים, למרות שאת רובם ניתן לפתור כיום בעזרת משוואות ליניאריות פשוטות. הבעיות "האלגבריות" האלה מעידות כי את היוונים עניינו גם תחומים מתמטיים נוספים מעבר לגיאומטריה (בה הם הטביעו את חותמם עד ימינו אנו), אך תרומתם פחות מקיפה.

נספח א

במהלך פתרון בעיה 24 בפפירוס ריינד, יש לחשב במה לכפול את 8 כדי לקבל 19.
כיום היינו מחלקים 19 ב- 8, כלומר פעולה הפוכה לכפל. מה עשו המצרים? הנה החישוב שלהם.

שמונה כפול אחד שווה שמונה	1	8
שמונה כפול שתיים שווה שש-עשרה	2	16

כיצד נמשיך כעת? ברור שיש לחבר בטור השמאלי 3 ל- 16 כדי לקבל 19. אילו מכפלות של 8 יש לבחור כדי לקבל 3 ?
נראה כיצד עשו זאת המצרים.

המצרים עברו לשברים	$\frac{1}{2}$	4
כל שורה חצי מקודמתה.	$\frac{1}{4}$	2
	$\frac{1}{8}$	1

בטור הימני מופיעים הכופלים של 8. איזה מכפלות של 8 נותנות לנו 19 בטור השמאלי? אפשר להגיע ל- 19 ע"י $16 + 2 + 1$, כלומר ע"י כפולות של 8 ב- 2, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$. ולכן כאשר ניקח רק את השורות 2, 4 ו- 5 בטור הימני נקבל:

2	16
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	1
$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	19

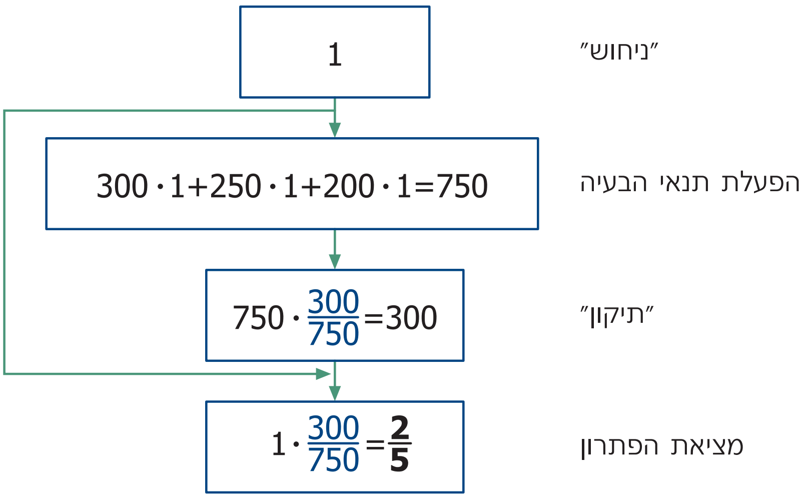
כלומר, $8 \cdot 2\frac{3}{8} = 19$

נספח ב

תשובה לשאלה: עושה הלבנים

פתרון בעזרת שיטת ההצבה השקרית

נניח שלהשלמת העבודה נחוץ להם יום אחד.



פתרון בעזרת משוואה

נסמן ב- x את מספר הימים הנחוצים להשלמת העבודה.

$$(300 + 200 + 250)x = 300$$

$$750x = 300$$

$$x = \frac{300}{750} = \mathbf{\frac{2}{5}}$$

תשובה: שלושתם יעבדו יחד $\frac{2}{5}$ יום כדי להכין 300 לבנים.

תשובה לשאלה: אריה מפליז

לפי נתוני השאלה:

העין הימנית ממלאת $\frac{1}{2}$ מיכל ביום.

העין השמאלית ממלאת $\frac{1}{3}$ מיכל ביום.

הרגל הימנית ממלאת $\frac{1}{4}$ מיכל ביום.

הפה ממלא 2 מיכלים ביום (של 12 שעות).

נסמן ב- x את מספר הימים הדרושים למילוי המיכל

$$(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+2)x = 1$$

$$\frac{37}{12}x = 1$$

$$\mathbf{x = \frac{12}{37}}$$

תשובה:

$\frac{12}{37}$ יום (כ- 4 שעות) דרושים למילוי המיכל.

פתרון בעזרת שיטת ההצבה השקרית.

נניח שדרושים להם 12 ימים למלא את המיכל.

"ניחוש" $\boxed{12}$

הפעלת תנאי הבעיה $\boxed{12\cdot\frac{1}{2}+12\cdot\frac{1}{3}+12\cdot\frac{1}{4}+12\cdot 2=37}$

"תיקון" $\boxed{37\cdot\frac{1}{37}=1}$

מציאת הפתרון $\boxed{12\cdot\frac{1}{37}=\mathbf{\frac{12}{37}}}$