משפט מורלי

מהרכבת תצרף (פאזל) להוכחה דדוקטיבית

תקציר

במאמר זה נתאר שימוש בתוכנה של גיאומטריה דינמית כדי לעסוק במשפט מפתיע ויפה שלא נכלל בתכנית הלימודים. הוכחת המשפט אינה פשוטה, אבל הידע הדרוש הוא בסיסי למדי. מטרתנו להציג דוגמה לתרומה של גיאומטריה דינמית בבניית הוכחה, תוך שימוש בממצאים אמפיריים לתובנה ולהשראה של טיעונים דדוקטיביים. כלומר, נראה כיצד תהליכי התנסות ודדוקציה יכולים להשלים זה את זה ולא לבוא זה על חשבון זה.

מבוא

הופעת תוכנות מסוג "גיאומטריה דינמית" גרמה לעניין מחודש בגיאומטריה בכלל, ובמיוחד במשפטים שלא נכללים בתכנית הלימודים המסורתית. סביבה גיאומטרית דינמית משנה את המסגרת המסורתית של משפט והוכחה בגיאומטריה. הסביבה מהווה עולם-זוטא שבו משפט יכול להתפתח לפרויקט המתבסס על הקלות שבה ניתן ליצור, לבדוק ולהשוות מקרים פרטיים רבים. הבדיקות מובילות להשערות ובדיקתן במסגרת "הוכחה" אמפירית. לתפקידו של המחשב בפעילויות מסוג זה ערך רב בגישות מודרניות להוראת גיאומטריה. ואולם, קיים חשש שהדגשת ההוכחה האמפירית תבוא על חשבון הוכחה דדוקטיבית. "האם המחשב יחליף את הצורך בהוכחה?" שואלים הוילס וג'ונס (Hoyles and Jones, 1998). הם שוללים אפשרות זאת, אך רואים תפקיד מעניין וחשוב למרכיב האמפירי של גיאומטריה דינמית, וממשיכים לטעון שתוכנות מסוג גיאומטריה דינמית יכולות גם לקשר בין הוכחה אמפירית ושיקולים דדוקטיביים בשל האפשרות לבנות בניות עזר, לבדוק מקרים מיוחדים, ולטפל בשאלות "מה אם" או "מה אם לא".

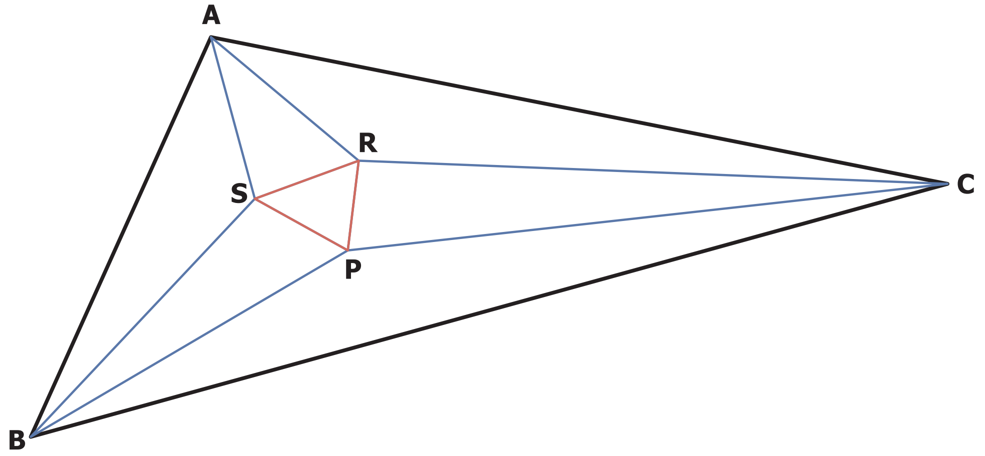
נפתח ברקע היסטורי קצר ואחריו נתאר התנסות בגיאומטריה דינמית לאיסוף מידע כמקור לרעיונות לקראת הוכחה בגישה של הוילס וג'ונס. נסביר את התובנה שהושגה ונציג את ההוכחה המלאה. לבסוף נציע מהלך מובנה למחצה לפרויקט חקר לתלמידים בכיתה (או מחוץ לכיתה) המבוסס על שימוש במחשב, ויזואליזציה וכלים נוספים.

משפט מורלי (Morley)

לפני הצגת המשפט נצטט את דבריו של ריצ'מונד (Richmond, 1939) בהספד לזכרו של מורלי: "התגובה הראשונית של כל גיאומטריקן הנחשף למשפט זה היא ספקנית, התגובה הבאה (לאחר אימות הטענה) היא הפתעה שעובדה פשוטה כל כך לא התגלתה מזמן."

בתחילת המאה העשרים פרנק מורלי (Frank Morley, 1860-1937) מתמטיקאי אנגלי-אמריקאי הכריז על המשפט הטוען:

בכל משולש ABC, נקודות החיתוך P, R, S (ציור 1) של הישרים המחלקים את הזויות לשלושה חלקים שווים, קובעות משולש שווה צלעות.



ציור 1

קוראים הנפגשים עתה בפעם הראשונה עם המשפט בוודאי מרגישים כמו המתמטיקאי ריצ'מונד.
במאמר זה נבנה הוכחה למשפט בשלושה שלבים:

לקראת הוכחה

החלטנו להתרכז בזויות המשולש SRP ולא בשוויון שלוש הצלעות; מדידת הזויות סביב P במקרים שונים, שהתקבלו על-ידי גרירה בעזרת תוכנת גיאומטריה דינמית, האירה את הדרך להוכחה.

פירוק התצרף (פאזל)

בניה, בצורה הדומה להשלמת תצרף, של כל הצורה על בסיס התובנה שנוצרה בשלב הקודם. כלומר, משולש שווה צלעות במרכז מוקף בשלוש קבוצות של משולשים חופפים, שיש צורך להראות כי הם "מתאימים".

הוכחה

הוכחה דדוקטיבית המתבססת על המידע הקודם בכיוון הפוך. כלומר, ממשולש שווה צלעות במרכז נעבור למשולש חדש הדומה למשולש הנתון ABC.

לקראת הוכחה

על מנת להוכיח כי המשולש SRP הוא שווה צלעות צריך להראות כי שלוש הצלעות שוות, או כי כל אחת הזוויות בת 60°. הטיפול בזוויות נראה מבטיח יותר מאחר ורוב המידע (המועט) שיש לנו מתייחס לזוויות (למשל, סכום הזוויות הפנימיות 180°, חלוקת זוויות לשלושה חלקים שווים). כדי להראות, לדוגמא כי $\measuredangle P = 60°$, נוכל לנסות לחשב את כל הזוויות מסביב ל- P שסכומן צריך להיות כמובן 360°.

נסמן: $\alpha = \frac{A}{3} \;,\quad \beta = \frac{B}{3} \;,\quad \gamma = \frac{C}{3}$

ידוע כי $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{3}(A + B + C) = 60^\circ$

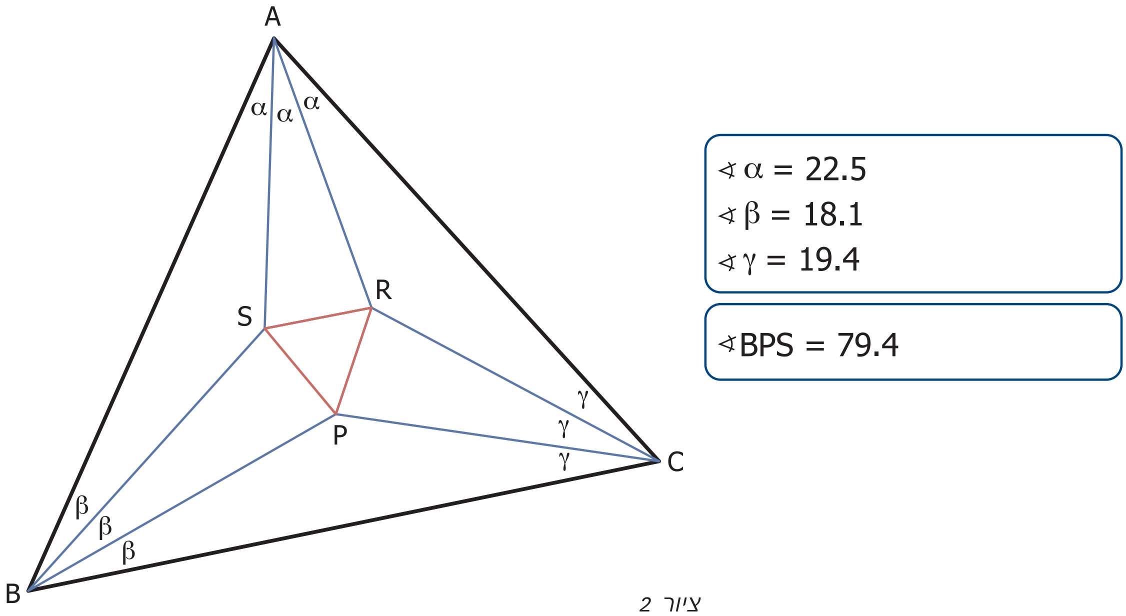
מכאן: $\sphericalangle BPC = 180^\circ - (\beta + \gamma)$

$\sphericalangle ARC = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$

$\sphericalangle ASB = 180^\circ - (\alpha + \beta)$

ועתה, אם נוכל לבטא את $\sphericalangle BPS$ ואת $\sphericalangle RPC$ בעזרת α, β ו- γ, ייתכן שנעלה על דרך שתוביל להוכחה כי הזווית $\sphericalangle SPR$ בת 60°. ואולם, ככל הידוע, נסיונות לנקוט בדרך ישירה זו להוכחת משפט מורלי הראו כי $\sphericalangle BPS$ ו- $\sphericalangle RPC$ מתעקשות להישאר לא נגישות (Stonebridge, 1995).

בשלב זה החלטנו לנסות להיעזר בתוכנה של גיאומטריה דינמית בתקוה לאסוף מידע על הזוויות $\sphericalangle BPS$ ו- $\sphericalangle RPC$. הקושי הראשון בו נתקלנו הוא העובדה כי התוכנה אינה "יודעת" לחלק זווית כלשהיא לשלושה חלקים שווים. אם כך, טרחנו ותכננו בנייה המחלקת זווית לשלושה חלקים שוים ונשמרת תחת שינויים דינמיים של המשולש המקורי עבור שלוש זוויותיו (ראו בנספח א' כיצד "אילצנו" את התוכנה לשלֵש זווית).



ציור 2

בציור 2 רואים משולש עם "משלשי" הזוויות שהתקבלו, תוך כדי גרירה, ואת ערכי הזוויות כפי שנמדדו על-ידי התוכנה. הנתונים המתקבלים על-ידי גרירה מצביעים על הקשר: $\sphericalangle BPS = 60^\circ + \gamma$ ובדומה לכך מתקבל הקשר $\sphericalangle RPC = 60^\circ + \beta$.

גם ערכי הזוויות האחרות (ראו ציור 3 בדף הבא) הם מהצורה $60^\circ + \alpha$, $60^\circ + \beta$, $60^\circ + \gamma$. זה הזמן לבדוק את הזוויות מסביב לנקודה P:

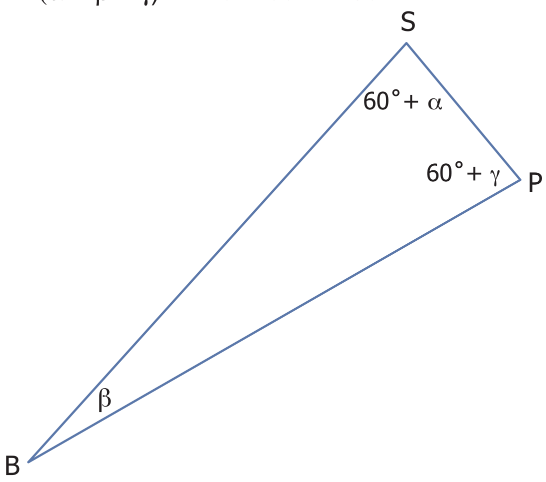
$\sphericalangle SPR + [180^\circ - (\beta + \gamma)] + (60^\circ + \beta) + (60^\circ + \gamma) = 360^\circ$. כלומר $\sphericalangle SPR = 60^\circ$

בדיקה זו אינה מהווה הוכחה, מאחר והיא מתבססת על השערה שעלתה מנתונים אמפיריים. ובכל זאת ההתנסות בסיוע המחשב תרמה לתובנה ולחשיפה של מרכיבי הבעיה. התנסות זו יצרה מוטיבציה לאסטרטגיה הלא שיגרתית של ההוכחה.

פירוק התצרף

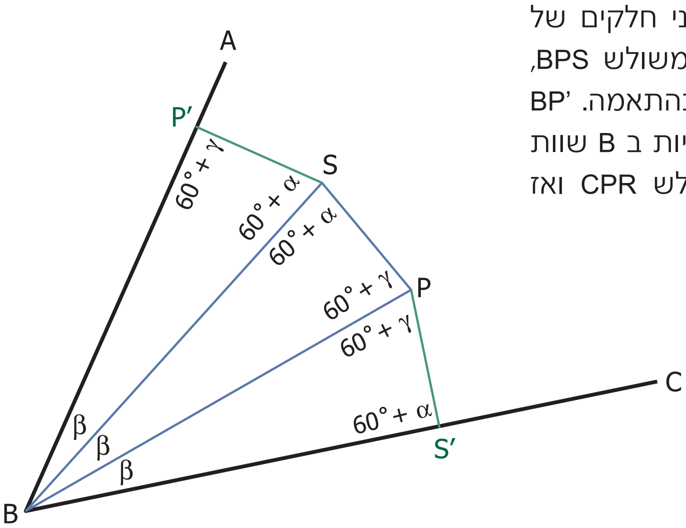
א. ציור 1, המדגים את משפט מורלי, מזמין שיקולים של פירוק פאזל והרכבתו מחדש בתהליך הוכחת המשפט (בדומה להוכחות מוכרות למשפט פיתגורס, ראו נספח ב'). על סמך הבדיקות שביצענו בעזרת המחשב אנו "יודעים" כבר את גודלן של כל הזוויות, בפרט ידוע כי $\sphericalangle SPR = 60^\circ$, וידועות הזוויות במשולש BPS (ציור 3). בדיקה מהירה של סכום הזוויות במשולש זה תומכת בנכונות ה"ידע" שבידינו:

$$(60^\circ + \alpha) + (60^\circ + \gamma) + \beta = 120^\circ + (\alpha + \beta + \gamma) = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

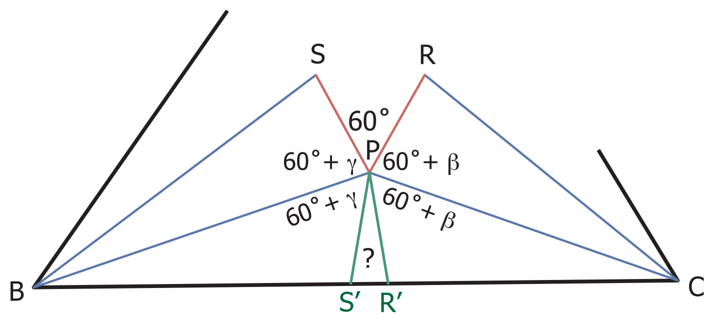


ציור 3

ב. בקודקוד B (ראו ציור 4) אנו מוצאים עוד שני חלקים של הפאזל, משולשים 'BPS ו-'BSP החופפים למשולש BPS, ומתקבלים על-ידי שיקופו בישרים BP ו-BS בהתאמה. 'BP מתלכד עם BA ו 'BS עם BC מאחר וכל הזוויות ב B שוות ל-β. באופן דומה נטפל בקודקוד C והמשולש CPR ואז המצב מסביב ל P מוצג בציור 5.



ציור 4



ציור 5

מחיבור הזוויות מסביב ל- P מקבלים: $300^\circ + 2\beta + 2\gamma + \sphericalangle S'PR' = 360^\circ$

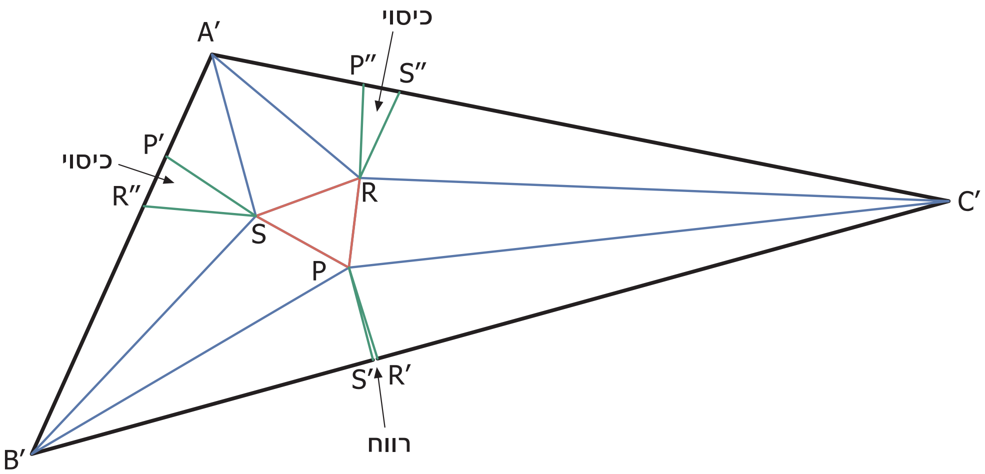
לפיכך, $\sphericalangle S'PR' = 60^\circ - 2(\beta + \gamma) = 60^\circ - 2(60^\circ - \alpha)$ כי $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$

ולכן $\sphericalangle S'PR' = 2\alpha - 60^\circ$

הערה: במשולש המקורי שלנו $\sphericalangle A$ היא קהה כך ש- $2\alpha > 60^\circ$.

לעומת מה שמצאנו ב- P, ב- R וב- S נמצא כיסויים/חפיפות במקום "רווח" כך שהזוויות תהיינה $60^\circ-2\beta$, $60^\circ-2\gamma$ בהתאמה. המשולש A'B'C' דומה למשולש ABC בגלל שוויון הזוויות.

עד כה קיבלנו את הפירוק של הצורה הנתונה למשולש שווה צלעות במרכז, הגובל עם שלוש קבוצות בנות שלושה משולשים חופפים. ה"פאזל" עדיין לא מותאם כהלכה בגלל הרווח והכיסויים החלקיים ב- P, S ו- R (ציור 6).



ציור 6

הוכחה

עתה נוכיח את משפט מורלי בעזרת האינפורמציה שצברנו בבניית המשולש A'B'C', הדומה למשולש ה"נתון" ABC, אשר בו "משלשי" הזוויות המתאימים נפגשים בנקודות P, S, R היוצרות משולש שווה צלעות. (בנייה זו מספיקה להוכחת המשפט היות וניסוח המשפט וכל צעדי ההוכחה עוסקים בזוויות. לכן, אם אנו מתחילים במשולש דומה, מתקבלות אותן הזוויות.) תחילה אנו בונים את החלקים השונים, *תוך הקפדה שלא נעשה הנחות שאין ביכולתנו להצדיק.*

1. בונים משולש שווה צלעות PSR שאורך צלעו 1 יחידה.
2. בונים משולש B'PS שבו האורך של PS הוא יחידה והזוויות B', P, S שוות ל- β, $60^\circ+\gamma$, $60^\circ+\alpha$ בהתאמה. (שימו לב, תמיד ניתן לבנות משולש כזה מאחר וסכום הזוויות הוא 180°.)
3. בונים שני משולשים B'PS', B'SP' החופפים למשולש B'PS.
4. כמו בצעדים 2, 3 בונים שתי קבוצות נוספות של שלושה משולשים זהים:

   $\Delta C'PR$, $\Delta C'RP''$, $\Delta C'PR'$

   שבהם האורך של PR יחידה, והזוויות: γ , $60^\circ+\alpha$, $60^\circ+\beta$ בהתאמה,

   והמשולשים $\Delta A'RS$, $\Delta A'SR''$, $\Delta A'RS''$

   שבהם האורך של RS יחידה והזוויות: α , $60^\circ+\beta$, $60^\circ+\gamma$ בהתאמה.

   עתה מרכיבים את עשרת המשולשים כדי לקבל את ציור 6.

ה"רווחים" וה"כיסויים החלקיים" היו צפויים, אבל נשאלת השאלה האם המשולש A'B'C' דומה למשולש הנתון ABC? הזוויות A', B', C' נכונות, אך מי מבטיח כי B'S' ו- R'C' הן על ישר אחד? (ובאופן דומה, איך יודעים כי B'P' ו- A'R" וכמוהן A'S" ו- C'P" הן על ישר אחד?)
נדגיש כאן את הרעיון העיקרי של ההוכחה:
בעמוד 4 לעיל ראינו כי BS' ו- BP' מתלכדים עם BC ו- BA בהתאמה. אם כך - מדוע עלינו להוכיח זאת? כיוון שהתחלנו עם משולש ABC, ואילו כאן אנו מנסים לבנות משולש דומה מחלקים. יש להראות כי אכן לכל α, β, γ כך ש- $\alpha+\beta+\gamma=60^\circ$, מתקבל ישר B'S'R'C'.

נבדוק מה קורה ב- P.

ראינו לעיל כי $\sphericalangle S'PR' = 2\alpha - 60^\circ$. ידוע גם כי $PS' = PR' = 1$.

לכן: $\sphericalangle PS'R' = \sphericalangle PR'S' = \frac{1}{2}[180^\circ - (2\alpha - 60^\circ)] = 120^\circ - \alpha$

כמו כן (על סמך הבנייה) $\sphericalangle PS'B' = \sphericalangle PR'C' = 60 + \alpha$
אם כך, כל הקטעים B'S' , S'R' , R'C' הם על ישר אחד. (מאחר שסכום הזוויות ב- S' הוא 180° - הנקודות B' , S' , R' על ישר אחד; מאחר שסכום שתי הזוויות ב- R' הוא 180° - הנקודות S' , R' , C' על ישר אחד).
באופן דומה (אלא שבמקום "רווח" יש "כיסוי") אפשר להראות כי הקטעים B'R" , R"P' , P'A' וכן S"P" , P"A' , C'S" הם על ישר אחד.
ענינו בחיוב על השאלות ולכן השלמנו את ההוכחה. כלומר המשולש A'B'C' דומה למשולש הנתון ABC ו"משלשי" הזווית המתאימים נפגשים בשלוש נקודות היוצרות משולש שווה צלעות PSR כפי שטוען משפט מורלי.

סיכום

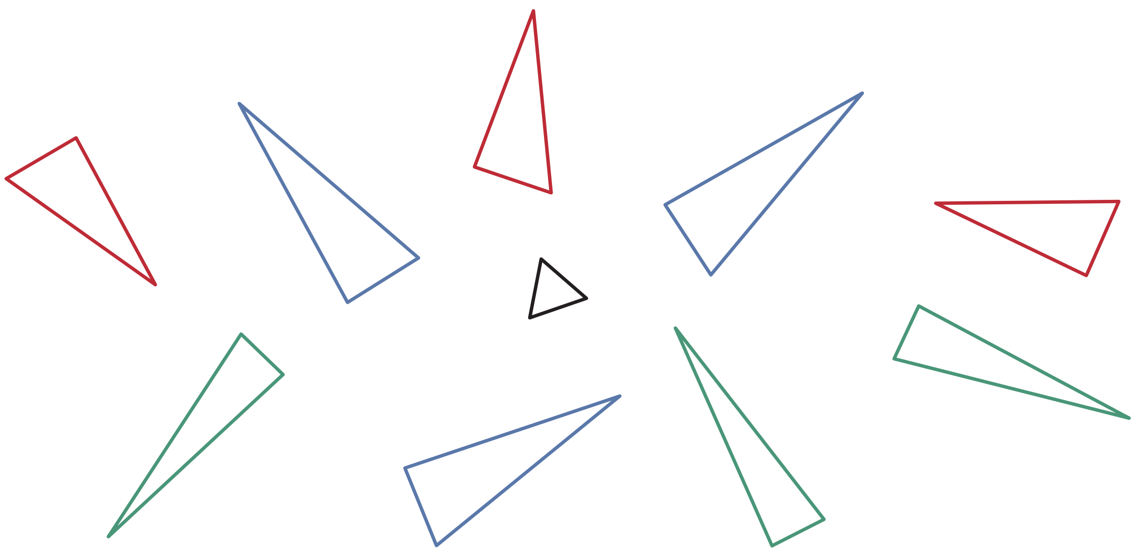
בסקירת צעדי ההוכחה מתברר כמה מועט הידע הגיאומטרי הנדרש: סכום הזוויות במשולש, סכום הזוויות בנקודה, ושוויון זוויות הבסיס במשולש שווה שוקיים. ואולם האסטרטגיה המוצעת להוכחה היא בלתי שגרתית. השתמשנו במחשב לא רק כדי לגלות את המשפט, אלא גם כדי לאסוף אינפורמציה שעליה התבססה ההוכחה. חשוב להדגיש שהמסקנה שעלתה מבדיקות במחשב, $\sphericalangle BPS = 60^\circ + \gamma$, היא מבחינה מתמטית השערה בלבד. אבל, כאשר אנו משתמשים בה לבנות את המשולש B'PS - אין בזאת כל השערה, תמיד ניתן לבנות משולש כזה מאחר וסכום זוויותיו 180° והאורך של צלע אחת בלבד נקבע PS=1.

קיימות הוכחות רבות למשפט מורלי, למשל (Coxeter, 1969; Stonebridge 1995; Penrose, 1953). בהוכחות אלו יש תיחכום דידקטי ומתמטי. הרעיון להשתמש בגיאומטריה דינמית כהשראה להוכחה צמח בעקבות הוכחה תיאורטית שניתנה על ידי Conway, http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/conway.shtml (נבדק במרץ, 2006) ואושרה בהתכתבות אישית עם מחברה.

הצגנו את ההוכחה בהשתלמויות מורים ובעקבות כך ערכנו אותה כסדנה של גילוי מודרך שבו התלמידים יכולים להיות שותפים פעילים בצעדי ההוכחה.

להלן המלצה לפעילות בכיתה המתבססת על המהלך שתיארנו:

1. מתחילים ממשולש שווה צלעות ומבקשים מהתלמידים להעלות השערות לגבי המשולש הפנימי שנוצר מפגישת "משלשי" הזוויות (במקרה מיוחד זה קל מאוד להסיק שהמשולש הפנימי גם הוא שווה צלעות).
2. בוחרים משולש כלשהו ומבקשים מהתלמידים להעלות השערות לגבי המשולש הפנימי שמתקבל על-ידי "משלשי הזויות". כדי להיעזר בתוכנת הנדסה דינמית יש להשתמש בבנייה המתוארת בנספח א'.
3. מדריכים את התלמידים בבניית ההוכחה כפי שמתואר לעיל ונעזרים לשם כך ב- 10 משולשים שצוירו על שקף צבוע באופן שמשולשים חופפים הם בעלי אותו צבע. הצבעים עוזרים להבחין בשלשות של משולשים חופפים, והשקיפות עוזרת להבחין ב"רווחים" וב"כיסויים".



ציור 7

רשימת מקורות

Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to Geometry* (pp. 23-25), New York: Wiley.

Hoyles, C. and Jones, L. (1998). Proof in dynamic geometry contexts. In C. Mammana and V. Villani (Eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the Century*. An ICMI Study (pp. 121-128), Kluwer.

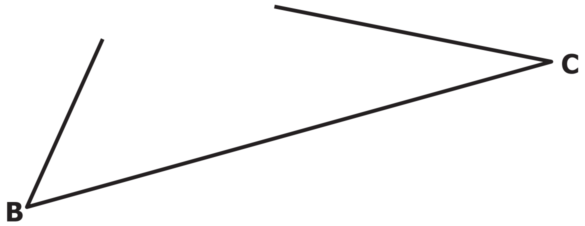
Penrose, R. (1953). Morley's trisector theorem. *Eureka* 16: 6-7.

Richmond, H. W. (1939). Frank Morley. *Journal of London Math Society* 14: 73-78.

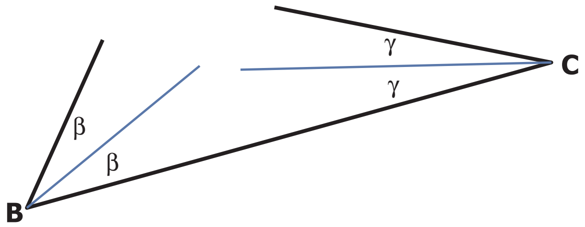
Stonebridge, B. R. (1995). A short Proof of Morley's trisector theorem. *Technical Report CSTR-95-018* (Dept. of Comp. Sc., Univ. of Bristol).

נספח א׳: בניית ״משלש״ זווית בעזרת תוכנה של גיאומטריה דינמית

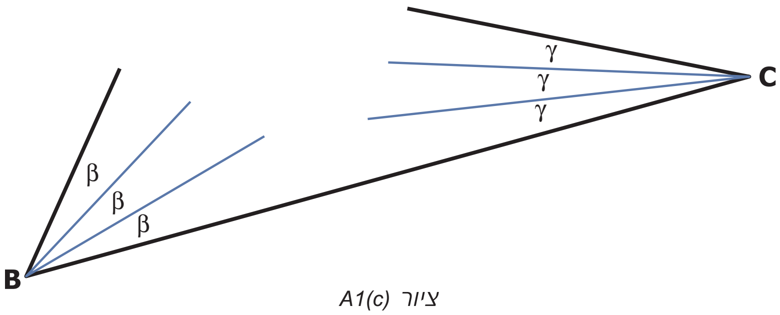
בבניית ההוכחה למשפט מורלי השתמשנו בתוכנה ״גיאומטריה בתנועה״ של חברת לוגל. בתוכנה אין פקודה המאפשרת לבנות ״משלשי״ זווית. לפיכך בנינו פרוצדורה המאפשרת פעולה זו: על קטע כלשהו BC בונים ב- B ו- C זוויות שרירותיות, אך לא גדולות מדי, ראו ציור A1(a). חוצים את הזוויות B ו- C (ציור A1(b)) ומעתיקים את חצאי הזוויות B , C מבחוץ ובצמוד לזוויות הקיימות, (ציור A1(c)). המטרה היא ליצור זווית המורכבת משלוש זוויות שוות (או לחילופין זווית גדולה ש״שולשה״).



ציור A1(a)

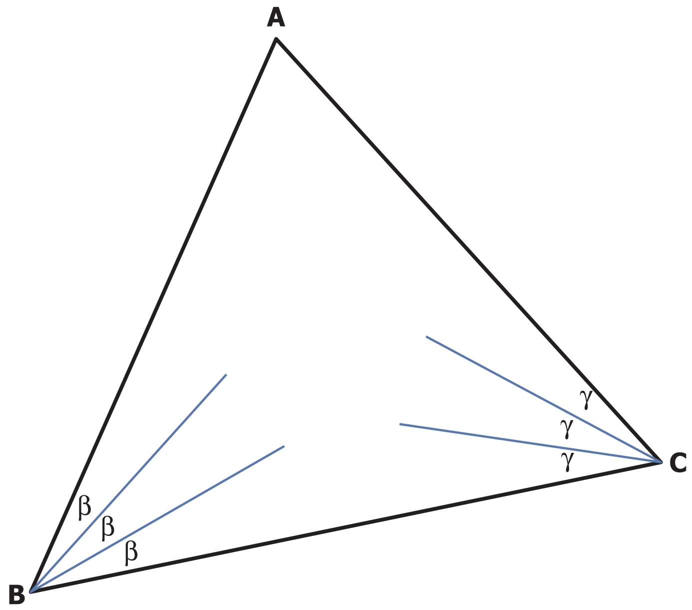


ציור A1(b)



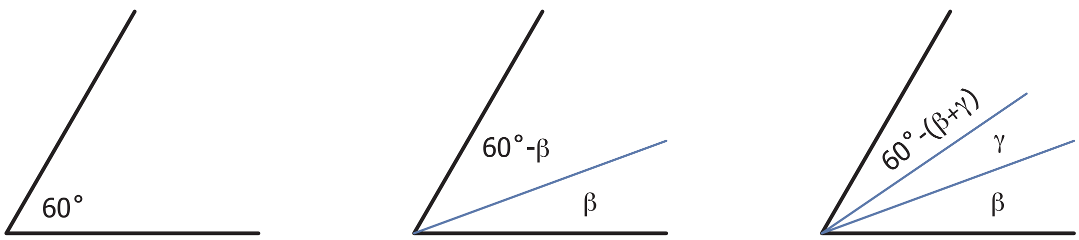
ציור A1(c)

אם הזוויות B, C אינן גדולות מדי (כלומר $2\beta + 2\gamma < 120^\circ$) אזי הישרים הקיצוניים נפגשים בנקודה A (ציור A2),



ציור *A2*

ומקבלים משולש ABC עם משלשי הזוויות B, C שאותם ניתן לגרור באופן חופשי (מאחר וחציית זווית, והעתקת זווית נשמרות על-ידי טרנספורמציית הגרירה הדינמית).
עדיין יש קושי "להכריח" את התוכנה לשרטט את משלשי הזווית A (מדידה וחלוקה לא תעמוד בשינויי גרירה). ואולם, ידוע כי אם $A = 3\alpha$ אזי $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$
אם כך, $\alpha = 60^\circ - (\beta + \gamma)$.
לכן, בונים זווית בת 60° ומחסרים ממנה בזו אחר זו את β ו- γ (ציור A3) על-ידי העתקת הזווית β ו- γ. עתה מעתיקים פעמיים את $60^\circ - (\beta + \gamma)$ בתוך המשולש בקודקוד A. ה"משלשים" ינועו עם כל הצורה על-ידי גרירת B או C.

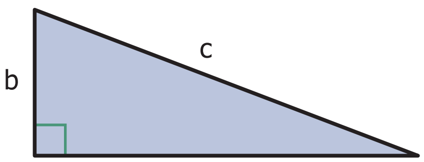


ציור *A3*

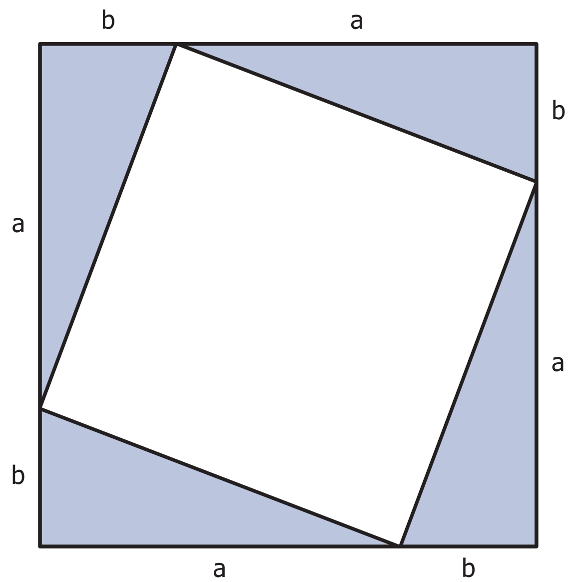
נספח ב׳: הוכחה על-ידי פירוק והרכבה

הוכחות ויזואליות מסוג של פירוק והרכבת תצרף מוכרות לנו בהקשר של משפט פיתגורס. נתון משולש ישר זווית (ציור B1), בונים שלושה העתקים זהים שלו ומסדרים אותם כמו בציור B2. אפשר גם לסדר אותם כמו בציור B3.

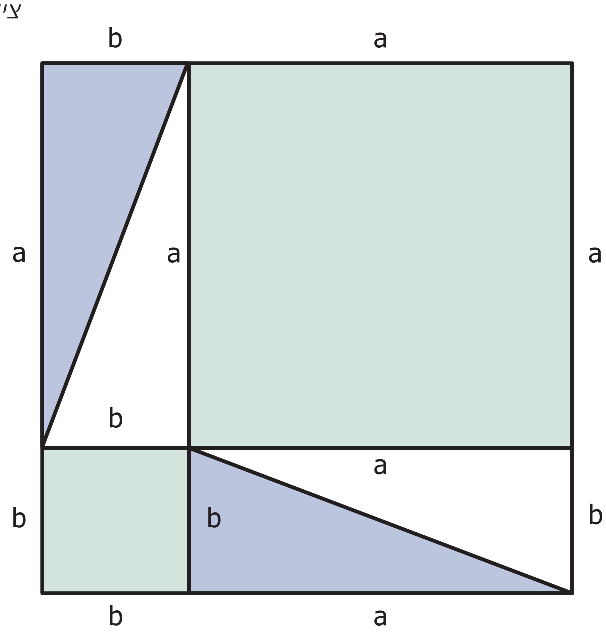
הריבועים הצבועים בציורים B3, B2 חייבים להיות שווים. מדוע זוהי הוכחת המשפט? האם נעשו הנחות כלשהן? (למשל כי הריבוע בציור B2 הוא אכן ריבוע), ניתן בקלות לאשר זאת. לפיכך שתי ההרכבות של המשולשים מהוות הוכחה תקפה.



ציור B1



ציור B2



ציור B3