

## תקציר

"הסרת התשיעיות" היא שיטה לבדיקת נכונות התוצאות של חישובים אריתמטיים שהיתה בשימוש כבר לפני כ- 1000 שנים. אמנם היום, בעידן המחשבוניים, שיטות בדיקה כאלה אינן בשימוש, אך גם מורים וגם תלמידים יכולים ללמוד דרך סוגיות בתורת המספרים, ולטפח תובנה מספרית תוך כדי הצצה בהיסטוריה ובמתמטיקה עליה מבוססת שיטת הסרת התשיעיות.

## שיטת הסרת התשיעיות

שיטת הסרת התשיעיות מתבססת על משפטים בחשבון מודולרי ומשמשת לאיתור טעויות בחישובים מספריים.

$$\text{אם: } a = a' \pmod{9} \text{ ו- } b = b' \pmod{9}$$

$$\text{אז: } a + b = a' + b' \pmod{9} \text{ ו- } a \times b = a' \times b' \pmod{9}$$

לפיכך אפשר לבדוק את נכונות החישובים  $a + b$ ,  $a \times b$  בעזרת תרגילים קלים יותר  $a' + b'$ ,  $a' \times b'$ . לדוגמה, נניח שחישובנו את המכפלה הבאה (וטעינו בספרת העשרות):

$$3257 \times 48329 = 157407563 \text{ (התוצאה הנכונה היא 157407553)}$$

לבדיקת החישוב, נמצא את השאריות בחילוק ב- 9 של שני האגפים

$$3257 = 8 \pmod{9}$$

$$48329 = 8 \pmod{9}$$

$$8 \times 8 = 1 \pmod{9}$$

$$157407563 = 2 \pmod{9} \text{ ואולם,}$$

כלומר, החישוב לבטח שגוי. ברור כי אם בדיקת השאריות נותנת תוצאה זהה בשני האגפים - לא נוכל להיות בטוחים שהתוצאה נכונה. למשל בטעות הבאה (הפחות סבירה):

$$3257 \times 48329 = 157407562$$

במקרה זה הטעות בספרת העשרות 6 במקום 5 מתקזזת עם הטעות בספרות האחדות 2 במקום 3, ולכן השארית בחילוק 9 היא 1, אבל התוצאה שגויה. אך כפי שנראה, הטעות הנפוצה בהעתקת חישוב - חילופי ספרות - תתגלה על-ידי הסרת התשיעיות.

בהתייחסות ל"רשת הבטחון" שנותנת השיטה אמר וילסון (Wilson, 1752):

"כאשר מבצעים חישוב אריתמטי בתשומת לב, אפשר להניח כי תשומת הלב מנעה טעויות; אם בנוסף לכך בדיקה של חישוב מודולו 9 עברה בהצלחה, גדולה הסבירות שתוצאת החישוב נכונה".

## מדוע 9?

נשאלת השאלה מדוע דווקא לחשב את שארית החילוק ב-9. מדוע לא חילוק ב-7 או 53? התשובה פשוטה, מאחר ולמציאת שארית החילוק של מספר נתון ב-9 אין צורך לבצע חילוק, מספיק לחשב את סכום כל הספרות, כי הסכום מודולו 9 זהה למספר הנתון מודולו 9 (מאחר ו-  $10^n \equiv 1 \pmod{9}$  לדוגמה,  $273 \pmod{9} = [2(99 + 1) + 7(9 + 1) + 3] \pmod{9} = [2 \cdot 99 + 7 \cdot 9 + 2 + 7 + 3] \pmod{9} = [2 + 7 + 3] \pmod{9} = 3$

קיצור הדרך הזה ברור למתמטיקאים, אבל אינו מובן מאליו לתלמידים שמבקשים לחקור את השיטה. תוך כדי החקירה אולי נגלה כי למעשה אין צורך לחבר את כל הספרות, ניתן להסיר תשיעיות בכל מקום שמבחינים בהן. לדוגמה:  $157407563 \rightarrow 1707563 \rightarrow 17075$  בשלב הראשון הסרנו 4 + 5 ובשלב השני הסרנו 6 + 3. כמו כן מתברר בקלות כי ניתן לחזור על חיבור הספרות. בדוגמה שלנו סכום הספרות של 157407563 הוא 38 שנותן 2 בחילוק ב-9, וסכום הספרות של 38 הוא 11 וגם הוא נותן שארית 2 בחילוק ב-9.

## פוסלי השיטה

שיטת הסרת התשיעיות היא פשוטה ואלגנטית ולכן מפתיע ומשעשע למצוא אנשים שהתנגדו לה בתור שיטת בדיקה של חישובים. אחד מהם הוא קוקר (Cocker, 1716). ספרו "אריתמטיקה" התפרסם לראשונה ב-1677 ומהדורות נוספות רבות שלו היו פופולריות באנגליה. הציטוט, המתייחס לשיטת הסרת התשיעיות שנביא להלן, לקוח מהמהדורה שהופיעה ב-1716 (בבדיקת מהדורות נוספות נמצאה התייחסות דומה לשיטה). כתב Cocker:

"הוכחת נכונות החישוב של תרגיל כפל נעשית בעזרת חילוק. למען האמת כל דרך אחרת היא שגויה. קיימת שיטת בדיקה של תרגילי כפל הנפוצה בבתי ספר והיא: ... (וכאן מופיע תיאור מילולי של הפרוצדורה בשיטת הסרת התשיעיות) ואם השארית בחלוקה ב-9 של התוצאה והשארית בחלוקה ב-9 שהתקבלה על-ידי הפרוצדורה של השיטה הן שוות, אז מסיקים שהחישוב נכון. אבל, אפשר למצוא הרבה מאוד מכפלות שגויות אשר יתנו שארית שווה לשארית המתקבלת על-ידי הפרוצדורה הזו. לפיכך השיטה אינה ראויה לאזכור ויש ללמד שיטה לבדיקת כפל רק כאשר התלמידים לומדים גם חילוק."

אם נשווה את הציטוטים של וילסון וקוקר נראה, כי שניהם ערים למגבלות שיטת הסרת התשיעיות, אך הגיעו למסקנות שונות לגבי הטיפול הדידקטי בשיטה.

לעומתם, פוסל אחר של השיטה, הטון (Hatton, 1731) נותן הסבר מפורש להתנגדותו, ולא טוען כמותם שהשיטה אינה נותנת בטחון מלא:

"בדיקת תרגיל כפל יכולה להיעשות רק על-ידי חילוק... אבל להעמיד פנים כי ניתן להוכיח שתרגיל כפל הוא נכון על-ידי הסרת תשיעיות -זוהי טעות; במה עדיף חילוק ב- 9 על חילוק ב- 2 או כל ספרה אחרת? הרי החילוק הקל ביותר הוא חילוק גורמי המכפלה ב- 10 וחילוק מכפלת השאריות ב- 10 והשוואת השארית עם השארית המתקבלת מחלוקת המכפלה ב- 10. ואולם הסכנה היא שהטעות בחישוב המכפלה היא המספר שבו מחלקים, או חזקה שלו, ואז הבדיקה לא תגלה את הטעות."

ואמנם, מדוע רצוי לחלק ב- 9 יותר מאשר ב- 2? והאם הסכנה שהצביע עליה Hatton מכסה את כל סוגי התקלות האפשריות? נדון בזאת בהמשך.

## נושאי הדגל (מדוע 9?)

הציטוט לעיל מפי Hatton מוביל אותנו ישירות אל השיקולים המעניינים ביותר של מצדדי הבדיקה על-ידי הסרת תשיעיות ובדיקות דומות, היינו: מהו המספר "הטוב ביותר" שיש לבחור לצורך הבדיקה. כאשר אומרים "הטוב ביותר" מתכוונים הן *לקלות* (למשל, המספר 10 הוא הקל ביותר, כפי שאמר Hatton), והן *למהימנות* (כלומר, ה"הסתברות" לאיתור טעות). יש קשר בין שני היבטים אלו. הסרת 2, 5, או 10, היא קלה מאוד, אך גם מאוד לא מהימנה; למשל, כל טעות באחת הספרות, מלבד אולי בספרת היחידות, לא תאוחר. מקורות היסטוריים מספקים רמזים. נתחיל בניתוח המרשים של שוקה (Chuquet) לפני 500 שנה (כפי שמופיע ב- (Flegg, Hay & Moss 1985):

"קיימות 'הוכחות' על-ידי 9, על-ידי 8, על-ידי 7 וכן הלאה עד 2, בעזרתן ניתן 'להוכיח' חישובי חיבור, חיסור, כפל וחילוק. מכל אלה רק הוכחה על-ידי 9, שהיא קלה לביצוע, והוכחה על-ידי 7 שהיא יותר בטוחה יטופלו להלן... קיים הבדל בין הוכחות אלו. הוכחה לפי 9 קל לבצע על-ידי חיבור ספרות, מה שאי אפשר לעשות לגבי 7. הוכחה לפי 7 נכשלת לעתים יותר רחוקות כי ל- 7 יש פחות במשותף עם מספרים אחרים מאשר ל- 9."

למה התכוון Chuquet במשפט האחרון? יתכן שאפשר להבין את כוונתו מתוך המקרים הקיצוניים של המספרים 2, 5 ו- 10, אשר כבשיטה העשרונית הם חסרי תועלת באיתור שגיאות חישוב. למספר 9 יש גם תכונות מיוחדות, שהרי הוא קטן ב- 1 מהבסיס 10. אחת מתכונותיו המיוחדות היא זו שמאפשרת בקלות לבצע בדיקה לפי 9.

Chuquet המשיך להתייחס לשני סוגים של טעויות אשר הסרת התשיעיות אינה יכולה לגלות:

- הוספה או סילוק של ספרות 9 או 0 מהמספר, כמו למשל כתיבת 9539 או 53 במקום 953, או כתיבת 34 או 3400 במקום 340.
- החלפת מיקום סיפרה (או חלק ממנה) מסידור אחד לאחר, כמו כתיבת 342 או 1143 במקום 243.

בכל הדוגמאות לעיל, בדיקה לפי 7 מגלה את הטעות, ואולם אם 342 "ישתנה" ל- 2421 אזי לא 7 ולא 9 יעזרו לגלות את השינוי. ברור שדוגמאות חריגות אינן מעניינות לצורך הדיון במהימנות השיטות. המהימנות תלויה בעיקר במקורות וסוגי השגיאות האופייניות לכפל ואילו מהן ניתנות לאיתור על-ידי הסרת ספרה מסוימת. קוקס (Cox, 1975) מייין שגיאות שיטתיות בארבע פעולות החשבון. מביניהן נבדקו 22 שגיאות כפל ונמצא כי גם 7 וגם 9 נכשלו בגילוי שתי שגיאות. ברור שאחוז ההצלחה לא יישמר כאשר מדובר בשגיאות לא שיטתיות. ואכן וורקמן (Workman, 1908) מדבר, כנראה על סמך נסיונו:

"שימו לב, מומלץ ביותר כי תבדקו בשיטת הסרת התשיעיות **כל** תרגיל כפל שתבצעו; אך זכרו כי השיטה לא תגלה שגיאות שבהן כמות הטעות היא בעצמה כפולה של 9. במיוחד אם יקרה שתרשמו את אחת המכפלות החלקיות במקום לא נכון בטרם תחברו אותן, הבדיקה לא תגלה את הטעות... כך גם אם תרשמו כמה ספרות במקומות לא נכונים."

הטעות האחרונה היא מאוד רלוונטית גם כאשר עובדים עם מחשבון ובמקום 73421 (למשל) רושמים 74321. גם הטעות הראשונה שצוינה לעיל, מיקום לא נכון של אחת או יותר משורות המכפלות החלקיות, אופיינית לביצועים של תלמידים, לדוגמה:

|   |           |       |   |          |
|---|-----------|-------|---|----------|
| x | 342705    |       | x | 342705   |
|   | 2067      |       |   | 2067     |
|   | 2398935   |       |   | 2398935  |
|   | 20562300  | במקום |   | 20562300 |
|   | 685410000 |       |   | 68541000 |
|   | 708371235 |       |   | 91502235 |

השגיאות הללו קשורות לסוגי הטעויות שמנה Chuquet. יתכן שהוא חשב גם עליהן, אך לא ייחס אותם במפורש לתהליך הכפל. הסרת התשיעיות לא תגלה שגיאות אלו, אבל הסרת השביעיות כן תגלה אותן. אם כך הדבר, למה שיטת הסרת התשיעיות זכתה לפופולריות רבה ואילו הסרת השביעיות נזכרת לעתים רחוקות בלבד? ברור כי הסיבה לכך נובעת מפשטות הביצוע של הסרת התשיעיות, ללא צורך בחילוק. אין אפשרות לפשט את הדרך בחילוק ב- 7. אז מה לגבי הסרת מספרים אחרים? מספרים חד ספרתיים לא מציעים תחליף ל- 9. Workman התייחס לבדיקה לפי 11. הוא הסביר כי מציאת השארית בחלוקה ל- 11 היא קצת יותר קשה מאשר בדיקה לפי 9 אך היא מגלה, בדרך כלל, טעות הנובעת מהזזת שורת מכפלה חלקית במקום אחד (אך לא בשני מקומות, כי  $100 \equiv 1 \pmod{11}$ ). כדי למצוא שארית של מספר בחלוקה ל- 11 הוא מציע את התהליך הבא: יש לחבר כל ספרה שנייה, החל מספרת היחידות. מהסכום שהתקבל מחסרים את הספרות שנותרו. אם התוצאה קטנה מ- 11 זוהי השארית, אחרת מחסרים 11 עד שמגיעים לתוצאה קטנה מ- 11 (ניתן להוסיף 11 או לחסר 11 בכל שלב).

לדוגמה: 342706

מחברים כל ספרה שנייה (מימין)  $6 + 7 + 4 = 17$   
מחסרים מהסכום את הספרות הנותרות  $17 - 3 - 2 = 12$   
מחסרים 11  $12 - 11 = 1$   
השארית בחילוק ב- 11 היא 1.

נשאלות מספר שאלות: מדוע השיטה עובדת, ומדוע אומר Workman כי השיטה בדרך כלל מגלה הזזת שורה במקום אחד. ואמנם, בדוגמה לתרגיל כפל ארוך שהבאנו לעיל, השורה האחרונה זזה במקום אחד, אבל בדיקה על-ידי הסרת 11 לא מגלה טעות זו. האם מצדיקה הגדלת המהימנות את הויתור על הפשטות בשיטת הסרת התשיעיות?

בדקנו מספר גדול (מעל 30) של ספרים ומצאנו כי אימות חישוב על-ידי 9 נמצא בכמעט כולם ואימות על-ידי 11 בספרים בודדים בלבד. יש לשער שבדיקת חישוב בעזרת הסרת 11 על-ידי תלמידים תהיה מלווה בשגיאות בביצוע האלגוריתם המסובך יחסית (חיבור כל ספרה שנייה, ואחר כך חיסור). ואכן קיימת פרוצדורה פשוטה יותר להסרת ה-11 שמתאר טרופקה (Trpofke, 1980). השיטה הופיעה אצל הערבים לפני כ-1000 שנים. במקום חיבור וחיסור ספרות אלטרנטיביות יש לכפול ב-10 כל ספרה זוגית ולחבר את סכום המכפלות לסכום הספרות במקומות האיזוגיים. זו גם שיטה שמחייבת מעקב זהיר. פרוצדורה פשוטה עוד יותר התפרסמה כמכתב ב-Mathematics Teacher (Chevalier & Irby, 1993): כדי למצוא את השארית של חילוק מספר ב-11 יש לחלק את המספר לזוגות מימין. לדוגמה,

$$537382231 \rightarrow 5 \ 37 \ 38 \ 22 \ 31$$

אם מחברים את כל המספרים, מקבלים 133. השארית של 133 בחילוק ל-11 היא כמו השארית של המספר המקורי, כלומר 1. בצורה זו שיטת הסרת ה-11 היא בדיוק כמו שיטת הסרת התשיעיות, פרט לכך שלגבי 11 פועלים על זוגות של ספרות במקום על ספרות בודדות. גם כאן ניתן לעשות קיצורי דרך:

$$\begin{array}{r} \text{למשל את} \quad 5 \ 37 \ 38 \ 22 \ 31 \\ \text{ניתן להמיר ב} \quad 5 \ 4 \ 5 \ 0 \ 9 \end{array}$$

העובדה כי  $10^{2n} \equiv 1 \pmod{11}$  מסבירה מדוע השיטה עובדת.

(העובדה כי  $10^{2n-1} \equiv -1 \pmod{11}$  מסבירה את הפרוצדורה של חיבור כל ספרה שנייה).

משום מה, הפרוצדורה הפשוטה יותר נשארה "כמעט" לא ידועה.

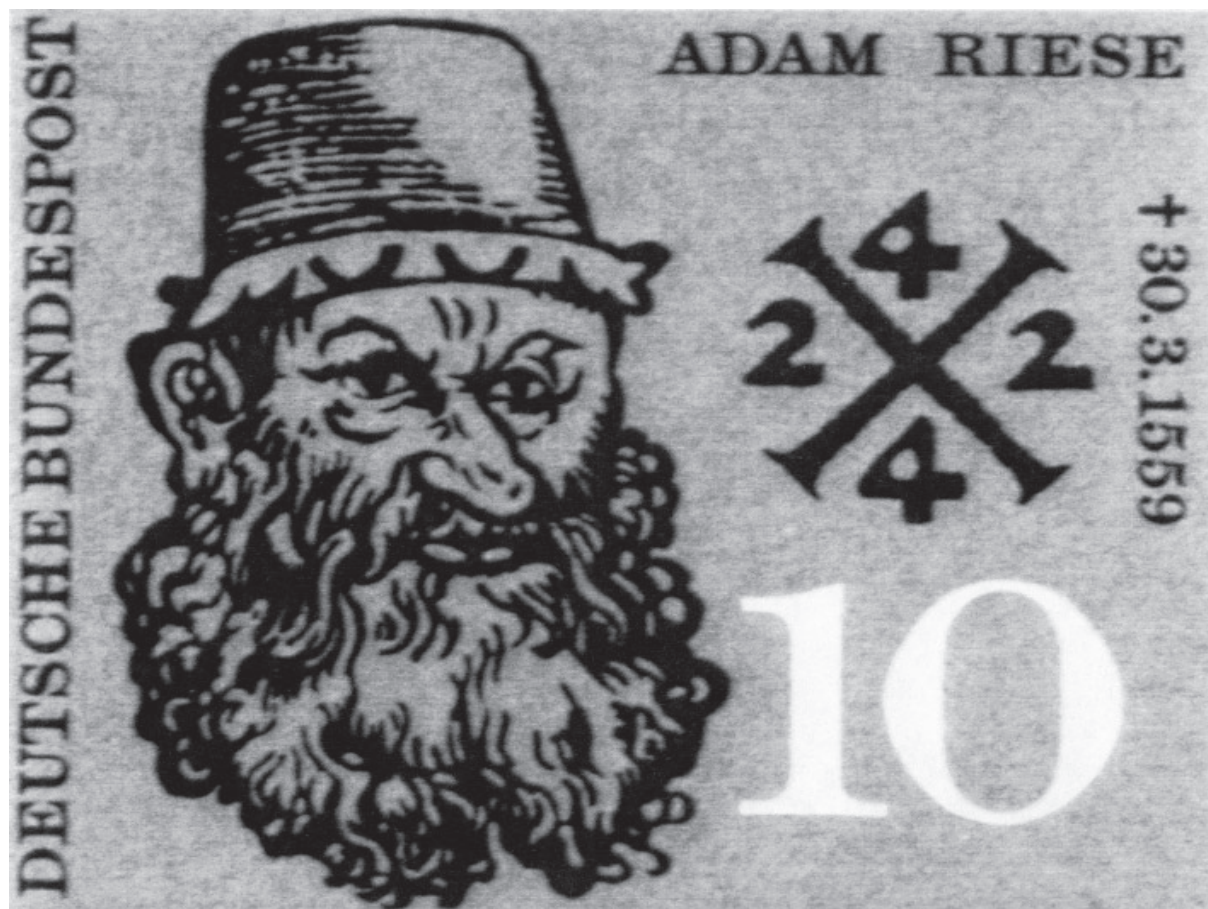
## סוף דבר

במחקרנו אודות שיטת הסרת התשיעיות (או מספר אחר) בספרי לימוד עתיקים נתקלנו בחומר מעניין ביותר והתקשינו לבחור מה לא לכלול במאמר זה. לסיום נביא "סיפור" אשר בוודאי גם ימצא חן בעיני תלמידים.

בעמוד הבא רואים שני בולים שהונפקו בגרמניה.

האדם המופיע על הבולים הוא "המורה לחשבון" אדם רייס (Adam Ries) (אשר שמו נכתב בדרך כלל בשגיאת כתיב Riese). השפעתו (המוצדקת) בגרמניה הייתה רבה יותר מאשר השפעתו של Cocker באנגליה. למרות שרייס נולד ב-1492, מסופר כי עד לפני כ-60 שנה נהגו להשתמש בשיטת הסרת התשיעיות בבתי הספר; וכאשר, פתרו נכון תרגיל חישוב נהגו להכריז כי התשובה "נכונה לפי אדם רייס".

(ראו Smith, 1958 Vol I, p. 337 או Boyer, 1985). הבול העליון הונפק ב-1959, 400 שנה לאחר מותו, והבול השני הופיע ב-1992, 500 שנה אחרי הולדתו. אכן, מחווה נאה למורה לחשבון.



על שני הבולים רואים סימן X עם מספרים. Ries הטביע מבנה זה על חותמתו האישית (Deschauer, 1992). אך גם הוא וגם אחרים נהגו להשתמש בסכימה זו לתיעוד השאריות לאחר הסרת התשיעיות. לדוגמא, אם התרגיל היה חיבור מספרים  $(A + B = C)$ , אז השאריות שהתקבלו מ-A ו-B נרשמו באיזורים השמאלי והימני (2, 2 על הבול העליון; 3, 3 על הבול התחתון). סכום השאריות (מודולו 9, אם דרוש) נרשם בחלק העליון והשארית של C בחלק התחתון. אם שני המספרים האחרונים היו שווים, החליטו שחישוב הסכום נכון. בספרי לימוד שנכתבו במאה ה-19 ניתן למצוא את הסימון כמו זה שעל הבולים.

## רשימת מקורות

- Boyer, Carl B (1985). *A History of Mathematics*. Princeton, NJ: Princeton University Press: 309.
- Bruckheimer, M., Ofir, R. and Arcavi, A. (1995). The case for and against "Casting out Nines". *For the Learning of Mathematics*, 15(2), 23-28.
- Chevalier, Doug, and Bob Irby (1993). Summer discovery. *Mathematics Teacher* 86: p. 67.
- Cocker, Edward (1716). *Cocker's Arithmetic*. London: Eben. Tracy, at the Three Bibles on London Bridge, p. 45.
- Cox, L.S (1975). Systematic errors in the four vertical algorithms in normal and handicapped populations. *Journal for Research in Mathematics Education*: p. 202-220.
- Deschauer, Stefan (1992). Das weite Rechenbuch von Adam Ries. Eine moderne Textfassung mit Kommentar and metrologischem Anhang und einer Einführung in Leben und Werk des Rechenmeisters. Braunschweig: Vieweg: p. 131-132.
- Flegg, Graham, Cynthia Hay and Barbara Moss (1985). *Nicolas Chuquet, Renaissance mathematician: A study with extensive translation of Chuquet's mathematical manuscript completed in 1484*, Dordrecht/Boston/Lancaster: D. Reidel Publishing Company, 1985: 41-2
- Hatton, Edward (1731). *An Intire System of Arithmetic or Arithmetic in All its Parts*. London: G. Strahan, at the Golden-Ball, over against the Royal-Exchange in Cornhill: p. 54.
- Ofir, R. and Arcavi, A (1992). Word Problems and equations: an historical activity for the algebra class-room. *Mathematical Gazette* 76: 69-84.
- Smith, David E (1958). *History of Mathematics* Vol. I & II. New York: Dover Publications Inc.
- Tropfke, Johannes (1980). *Geschichte der Elementarmathematik - Band I: Arithmetic und Algebra*. Berlin/ New York: de Gruyter: 166-7
- Wilson, John (1752). *An Introduction to Arithmetic*. Edinburgh: Sands, Kincaid & Donaldson and Gordon: 41-2.
- Workman, W.P.(1908) *The Tutorial Arithmetic*. London: University Tutorial Press: 28-9.

במכתב מיום 28.9.1897 לכתב העת המכובד Nature (1897, Vol. 56, 565-6), מוצעת בנוסף לשיטה למציאת השארית של תוצאות חילוק ב-9 גם שיטה יעילה למציאת המנה, ללא ביצוע החילוק:

"למציאת המנה של תוצאת חילוק ב-9 רשמו את המחולק ומתחתיו קו והוסיפו את השארית של חילוק ב-9 מתחת לספרת היחידות של המחולק. עתה חסרו את ספרת היחידות מהשארית (אם צריך - קחו "הלוואה") ורשמו את התוצאה מתחת ספרת העשרות של המספר והמשיכו לחסר.

$$\begin{array}{r} 9/75309 \ 6 \\ 83677/ \ 3 \end{array} \quad \text{לדוגמה:}$$

הסבר: השארית של חלוקת 753096 ב-9 היא 3. המנה תתקבל מסדרת תרגילי החיסור הבאים (בסדר משמאל לימין)  
 $13 - 6 = 7$ ,  $16 - 9 = 7$ ,  $6 - 0 = 6$ ,  $6 - 3 = 3$ ,  $13 - 5 = 8$ ,  $7 - 7 = 0$   
 אם כך, המנה היא 83677.

דוגמאות נוספות:

$$\begin{array}{r} 9/94613 \ 8 \\ 105126/ \ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9/58317 \ 3 \\ 64797/ \ 0 \end{array}$$

אם הספרה השמאלית של המחולק קטנה מ-9 תוצאת החיסור שלה תתן '0', ואם היא 9, החיסור יתן 1. המספר הרשום מתחת לקו (בלי השארית) הוא המנה המבוקשת."

מחבר המכתב לא נתן הסבר להצדקת שיטתו, למרות שלא קשה להראות זאת. אם נרשום את המחולק  $n$  בעזרת המנה  $q$  והשארית  $r$ :  $n = 9q + r$  יתקיים גם הקשר  $q = 10q + r - n$ . בהנתן  $n$  ו- $r$  נוכל צעד אחר צעד לשחזר את  $q$  בשיטה המתוארת לעיל. כדי למצוא את ספרת היחידות של  $q$ , מספיק שנחסר (עם הלוואה, לפי הצורך) מ- $r$  את ספרת היחידות של  $n$  (שהרי  $10q$  לא רלוונטי כי הוא מסתיים ב-0).

בדוגמה הראשונה לעיל, הספרה האחרונה בתוצאת התרגיל  $753096 - 3 + 836770$  היא  $7 (13 - 6)$ . נמשיך בדרך זו ונשחזר את הספרות הבאות של המנה. ממציא השיטה מציין גם כי תרגיל החיסור האחרון, מהווה גם בדיקה של ביצוע השיטה. אם מתקבל '0' כאשר הספרה השמאלית של המחולק קטנה מ-9, אזי או שחישבו המנה נכון או במקרה נדיר, נעשו שתי טעויות.

קוראים, שאינם מזדהים עם התלהבותו של ממציא השיטה לואיס קרול (Lewis Carroll) מעילותה - יגלו בודאי ענין בעובדה שהממציא הוא לא אחר מאשר מחבר ספר הילדים הפופולרי, "עליסה בארץ הפלאות", שהיה גם מרצה למתמטיקה.