העשרה מתמטית

שיטת קירוב למספרים אירציונליים על-ידי שברים משולבים

תקציר

במאמר זה נשחזר אלגוריתם למציאת שורש ריבועי של מספר טבעי המופיע בספרו של המתמטיקאי האיטלקי רפאל בומבלי (Rafael Bombelli), שחי במאה ה- 16. כאשר נכתב ספר האלגברה של בומבלי השברים העשרוניים היו פחות נפוצים מהשברים הפשוטים, ולכן הוא השתמש בשברים פשוטים. נלך בעקבות דרכו המעניינת ובנוסף לכך נבנה הוכחה להצדקת שיטתו.

שיטת קירוב להוצאת שורש של מספר טבעי

מתמטיקאים רבים התעניינו בפיתוח שיטות למציאת שורש של מספר טבעי שאינו ריבוע שלם. המתמטיקאי רפאל בומבלי (Rafael Bombelli), שחי במאה ה- 16 בבולוניה (Bologna) תיאר שיטה שפיתח להוצאת שורש. מעט מאוד ידוע עליו, פרט לכך שכנראה חי בשנים 1526-1573. השיטה נכללת בספרו L'Algebra Opera, במהדורה השניה שהופיעה לאחר מותו ב- 1579.


L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

בספר נכללות תרומותיו לפתרון משוואות ממעלה שלישית ורביעית ופתרונות אלגבריים לבעיות גיאומטריות (Boyer, 1985, p.322; Jayawardene, 1973). הספר אמנם נקרא "אלגברה", אך אין בו ביטויים אלגבריים כפי שאנו מכירים אותם כיום.

שיטה ליצירת שברים במציאת שורשים ריבועיים

נצטט את תיאור השיטה מספרו של בומבלי ואת הדוגמה שהוא הביא. (איור 1 לקוח מעמ׳ 35-37 במהדורת 1579 בשפה האיטלקית.)

Modo di formare il rotto nella estrattione delle Radici quadrate.

Molti modi sono stati scritti da gli altri autori de l'uso di formare il rotto; l'uno tassando, e accusando l'altro (al mio giudicio) senza alcun proposito, perche tutti mirano ad un fine; E ben vero che l'una è più breue dell'altra, ma basta che tutte supplisscono, e quella ch è più facile, non è dubbio ch'essa sarà accettata da gli huomini, e sarà posta in uso senza tassare alcuno; perche potria essere, che hoggi io insegnassi una regola, laquale piacerebbe più dell'altre date per il passato, e poi venisse un'altro, e ne trouasse una più vaga, e facile, e cosi sarebbe all'hora quella accetata, e la mia confutata, perche (come si dice) la esperienza ci è maestra, e l'opra loda l'artefice. Però metterò quella che più à me piace per hora, e sarà in arbitrio de gli huomini pigliare qual vorranno: dunque venendo al fatto dico. Che presuposto, che si voglia il prossimo lato di 13, che sarà 3, e auanzerà 4, il quale si partirà per 6 (doppio del 3 sudetto) ne uiene $\frac{2}{3}$, e questo è il primo rotto, che si hà da giongere al 3, che fà 3 $\frac{2}{3}$, ch'è il prossimo lato di 13, perche il suo quadrato è 13 $\frac{4}{9}$, ch'è superfluo $\frac{4}{9}$, ma uolendosi più approssimare, al 6. doppio del 3 se gli aggionga il rotto, cioè li $\frac{2}{3}$, e farà 6 $\frac{2}{3}$, e per esso partendosi il 4, che auanza dal 9 fino al 13, ne uiene $\frac{3}{5}$, e questo si gionge al 3, che fà 3 $\frac{3}{5}$, ch'è il lato prossimo di 13, di cui il quadrato è 12 $\frac{24}{25}$, ch'è più prossimo di 3 $\frac{2}{3}$, ma uolendo più prossimo, si aggionga il rotto al 6 fa 6 $\frac{3}{5}$, e con esso si parta pur il 4, ne uiene $\frac{20}{33}$, e questo si aggionga, come si è fatto di sopra al 3 fà 3 $\frac{20}{33}$, ch'è l'altro numero più prossimo, perche il suo quadrato è 13 $\frac{4}{1089}$, ch'è troppo $\frac{4}{1089}$, e uolendo piu prossimo, partasi 4 per 6 $\frac{20}{33}$, ne uiene $\frac{132}{218}$, che gionto con il 3 fà 3 $\frac{132}{218}$, e questo è piu prossimo del passato, che il suo quadrato è 13 $\frac{4}{47524}$ … e cosi procedendo si può approssimare à una cosa insensibile.

... epro cedendo (come si è fatto di sopra) si approssimarà quanto l'huomo vorrà, e se bene ci sono molte altre regole: queste nondimeno mi sono parse le più facili, però a queste mi atterrò, le quali hò trouato con fondamento, qual non uoglio restare di porlo, benche non sarà inteso, se non da chi intende l'agguagliare di potenze, e tanti eguali à numeri, del quale tratterò nel secondo libro à pieno: Però hora parlo solo con quelli.

Pongasi dunque, che si habbia à trouare il lato prossimo di 13, di cui il più prossimo quadrato è 9; di cui il lato è 3, però pongo che il lato prossimo di 13. sia 3. p. 1 tanto, e il suo quadrato è 9. piu 6 tanti p. 1. potenza, ilqual'è eguale à 13. che leuato 9. a ciascuna delle parti, resta 4, eguale à 6 tanti più 1 potenza. Molti hanno lasciato andare quella potenza, e solo hanno agguagliato 6 tanti à 4, che il tanto valeria $\frac{4}{6}$ & hanno fatto, che l'approssimatione si è 3 $\frac{2}{3}$ perche la positione fù 3. p. 1. tanto, uiene ad essere 3 $\frac{2}{3}$, ma uolendo tenere conto della potenza ancora, valendo il tanto $\frac{2}{3}$, la potenza ualerà $\frac{2}{3}$ di tanto, che aggionto con li 6 tanti di prima: si hauerà 6 $\frac{2}{3}$ tanti eguale à 4, che agguagliato il tanto valerà $\frac{3}{5}$, e perche fù posto 3. p. 1. tanto, sarà 3 $\frac{3}{5}$, e ualendo il tanto $\frac{3}{5}$, la potenza valerà $\frac{3}{5}$ di tanto, e si hauerà 6 $\frac{3}{5}$ di tanto eguale à 4, si che si uede donde nascono le regole dette di sopra.

איור 1: תיאור שיטת בומבלי ודוגמה להפעלתה

להלן תרגום חופשי לעברית של חלקים מהטקסט המקורי:

״מחברים שונים הציעו שיטות ליצירת שברים בהוצאת שורש, והם מבקרים (ללא הצדקה, לדעתי) זה את שיטתו של זה. נכון כי שיטה מסוימת היא אולי קצרה מאחרת, אבל העיקר הוא שיש שיטות זמינות ואנשים יבחרו בשיטה הקלה ביותר לחישוב, בלי להשמיץ שיטה אחרת. להלן אציג שיטה אשר בשלב זה היא השיטה שמוצאת חן בעיני ביותר. אתאר אותה בעזרת דוגמה:

כאשר רוצים למצוא קירוב לשורש של 13, מניחים כי השורש הוא 3 עם שארית 4. את השארית הזו מחלקים ב- 6 (כפליים מהמספר 3 לעיל) ומקבלים $\frac{2}{3}$, זהו השבר הראשון שיש להוסיף ל- 3, וכך $3\frac{2}{3}$ הוא קירוב לשורש של 13. מאחר והריבוע של מספר זה הוא $13\frac{4}{9}$, הרי שהוא יותר גדול ב- $\frac{4}{9}$. על מנת לקבל קירוב קרוב יותר, מחברים 6 (שהוא כפליים 3) לשבר $\frac{2}{3}$, ומקבלים $6\frac{2}{3}$; מחלקים מספר זה ב- 4 שהוא ההפרש בין 13 ו-9...״

מי שמבין, את האמור לעיל - יכול להפסיק לקרוא כאן. האחרים יקראו בהמשך כיצד פענוח שפה מתמטית בת ארבע מאות שנה יכול לתרום הן לידע המתמטי והן לידע הדידקטי שלנו. גם אם נתרגם את שיטתו של בומבלי (לא רק מאיטלקית) לסימול מתמטי מודרני כפי שניתן לקרוא אצל Smith (1929, pp. 80-82) ונעקוב אחרי שלבי החישוב - עדיין נשארת הפרוצדורה ״מוצנחת״ ולא צומחת. מדוע מחלקים את השארית ב-6? מדוע מוסיפים 6 ל- $\frac{2}{3}$? מדוע מחלקים את $6\frac{2}{3}$ ב- 4? וכך הלאה.

מדוע האמין בומבלי שהשיטה שלו הכי מוצלחת? נבין זאת יותר טוב בהמשך אם ניעזר בהסברים שהמחבר בעצמו סיפק, בהסתמך על תרגום לאנגלית כפי שהוא מופיע ב- Dedron and Itard (1974, pp. 69-70). לצד ההסברים של כל צעד בתהליך נרשום את תרגומם לכתיב מתמטי של ימינו.

1. צריכים למצוא את השורש של 13. הריבוע הקרוב ביותר הוא 9, והשורש שלו הוא 3 אומרים שקירוב לשורש של 13 הוא 3 ועוד כמות אחת (נעלם).	$3 + x = \sqrt{13}$
2. ריבועו הוא 9 ועוד 6 כמויות (נעלמים) ועוד חזקה אחת. נשווה זאת ל 13.	$(3 + x)^2$ $\Rightarrow 9 + 6x + x^2 = 13$
3. מחסרים 9 משני אגפי המשוואה ויישאר כי 4 שווה ל–6 כמויות ועוד חזקה אחת.	$6x + x^2 = 4$
4. הרבה אנשים הזניחו את החזקה ופשוט כתבו כי 6 כמויות שווֹת ל 4, אז הכמות (הנעלם) יוצאת $\frac{2}{3}$ ...	$6x = 4$ $\Rightarrow x = \frac{2}{3}$
5. ... והערך המקורב לשורש הוא $3\frac{2}{3}$ מאחר והוא מתקבל בתוך 3 ועוד כמות אחת.	$\sqrt{13} \approx 3 + x \approx 3\frac{2}{3}$

עד כאן מצא בומבלי קירוב ראשון לשורש על-ידי הזנחת הערך של x^2 וכך קיבל $\frac{2}{3} = x$, השבר שיש לחבר ל- 3 כדי לקבל קירוב ל- $\sqrt{13}$. ולכן הוא סיכם זאת כך:

כאשר רוצים למצוא קירוב לשורש של 13, מניחים כי השורש הוא 3 עם שארית 4. את השארית הזו מחלקים ב- 6 (כפליים מהמספר 3 לעיל) ומקבלים $\frac{2}{3}$, זהו השבר הראשון שיש להוסיף ל- 3, וכך $3\frac{2}{3}$ הוא קירוב לשורש של 13.

את הקירוב השני מוצאים כאשר לוקחים בחשבון את מה שהוזנח בקירוב הראשון. ההצדקה "להזניח" את x^2, היא כי ערכו במקרה זה ($\frac{4}{9}$) קטן יחסית ל-x; כמו כן הטעות הנובעת מההזנחה תתוקן על-ידי הקירובים הבאים.

6. ואולם כאשר לוקחים בחשבון את החזקה – אם הכמות היא $\frac{2}{3}$, החזקה היא של הכמות, אשר בהוספתה ל– 6 כמויות תתן 6 ועוד $\frac{2}{3}$ כמויות השווים ל–4.	$6x + x^2 = 4$ $6x + x \cdot x = 4$ $\Downarrow$ $6x + \frac{2}{3} \cdot x = 4$
7. אם כך, הכמות (הנעלם) שווה ל– $\frac{3}{5}$, ומאחר והקירוב הוא 3 ועוד כמות אחת, הקירוב יוצא $3\frac{3}{5}$.	$\Rightarrow x = \dfrac{4}{6 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$ $\Rightarrow 3 + x = 3\frac{3}{5}$

שימו לב כי בומבלי לקח את המכפלה $x^2 = x \cdot x$ ונתן לאחד הגורמים את הערך הקודם שנמצא וה- x האחר יוצר את השבר החדש שיש להוסיפו ל- 3 כדי לקבל את הקירוב הבא של $\sqrt{13}$. "לב" השיטה של בומבלי הוא התפקיד הכפול (double entendre) שהוא מעניק למשתנה x בביטוי x^2. באחד הגורמים של x·x הוא מציג את הערך שמצא בקירוב הקודם ואת הערך השני משאיר כנעלם, אותו יש למצוא. נראה הפעלה איטרטיבית של השיטה בקירוב השלישי.

8. אבל אם הכמות שווה ל– $\frac{3}{5}$, החזקה היא $\frac{3}{5}$ של הכמות ונקבל $6\frac{3}{5}$ כמויות שווה ל–4, . . .	$6x + x^2 = 4$ $6x + x \cdot x = 4$ $\Downarrow$ $6x + \frac{3}{5} \cdot x = 4$

בומבלי פתר את המשוואה עבור x, קיבל את הקירוב השלישי, $3\frac{20}{33}$, והוסיף כי התהליך יכול להימשך כל עוד יש סבלנות לאדם המחשב (ראו Smith, 1929, pp. 80-82).

תרגיל 1

א. מהי הטעות בקירוב השלישי?

ב. מצאו קירוב נוסף בשיטת בומבלי.

שיטת בומבלי ושברים משולבים

את האלגוריתם של בומבלי נוכל לתאר גם באופן הבא: רוצים למצוא ערך ל- x כך ש- $3 + x = \sqrt{13}$. מעלים בריבוע את שני האגפים $(3+x)^2 = 13$. אם כך, $6x + x^2 = 4$ או $x(6+x) = 4$ ולבסוף $x = 4/(6+x)$. שימו לב כי x בביטוי $4/(6+x)$ מקבל את הערך בשלב הקודם. ואולם x באגף השמאלי מקבל ערך חדש שמתקבל בשלב הנוכחי. קשר זה מתאים ל"הצגה הכפולה" שצוינה מקודם. הסימון המודרני הוא:

$$x_{n+1} = \frac{4}{6 + x_n}$$

שימוש בסימון זה נותן מה שמוכר היום בשם **שברים משולבים**.

בכתבי בומבלי לא ניתן למצוא צורה כזו או דומה לשברים משולבים, ובכל זאת ראה סמית (Smith, 1953 pp. 419-420) בשיטת בומבלי את תחילת הפיתוח של שברים משולבים.

$$x_0 = 0\,,\; x_1 = \frac{4}{6 + x_0}\,,\; x_2 = \frac{4}{6 + x_1}\,,\; x_3 = \frac{4}{6 + x_2} = \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + x_1}}$$

$$x_4 = \frac{4}{6 + x_3} = \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + x_1}}}$$

יישומים בכיתה

ניתן לשלב פעילויות לשחזור ויישום שיטת בומבלי במספר מקומות בתכנית הלימודים. למשל בדיון על שיטות קירוב שונות למציאת שורשים ריבועיים, או כחלק מיחידת לימוד שעוסקת במספרים אי-רציונליים והתפתחותם ההיסטורית (ראו למשל: Arcavi, Bruckheimer, Ben-Zvi, 1987).

בעזרת מחשב נוכל לבנות שברים משולבים על-ידי איטרציות ולחשב את ערכם.

להלן חישוב הערכים של 10 הקירובים הראשונים x_i (שיש להוסיף ל- 3) בחישוב $\sqrt{13}$.

$$\frac{2}{3}\,,\; \frac{3}{5}\,,\; \frac{20}{33}\,,\; \frac{66}{109}\,,\; \frac{109}{180}\,,\; \frac{720}{1189}\,,\; \frac{2378}{3927}\,,\; \frac{3927}{6485}\,,\; \frac{25940}{42837}\,,\; \frac{85674}{141481}$$

נתאר את הקירוב השמיני כשבר משולב:

$$3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{2}{3}}}}}}}} = 3+\frac{3927}{6485}$$

וכשבר עשרוני בדיוק של 25 ספרות אחרי הנקודה העשרונית:

$$3 + \frac{3927}{6485} \approx 3.6055512721665381649961449$$

תרגיל 2

קרבו $\sqrt{2}$ לפי שיטת Bombelli עד דיוק של 4 ספרות עשרוניות (1.4142).

נושאים לדיון

נתבונן בארבעה הקירובים הראשונים ל- $\sqrt{13}$ לפי שיטת בומבלי, הפעם בעזרת שברים עשרוניים:

$$3 + x_1 = 3.666666...$$

$$3 + x_2 = 3.6$$

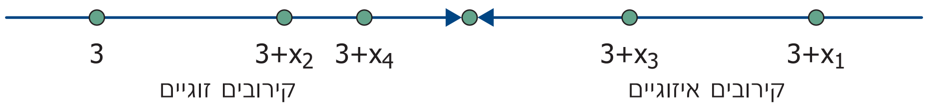
$$3 + x_3 = 3.606060...$$

$$3 + x_4 = 3.6055045...$$

ונשווה אותם עם הצגה עשרונית (מקורבת) של $\sqrt{13}$

$$\sqrt{13} = 3.6055513...$$

רואים כי הקירובים האיזוגיים גדולים מ- $\sqrt{13}$ אך הולכים וקטנים והקירובים הזוגיים קטנים מ- $\sqrt{13}$ אך הולכים וגדלים. ניתן לייצג זאת בצורה סכמטית על-ידי הציור הבא:



בדיקה בעזרת המחשב מאשרת את המסקנה לגבי דוגמאות נוספות. בטבלה להלן חושבו 10 קירובים ונבדק הסימן של ההפרש (diff-sign) בין $\sqrt{13}$ והקירוב (approx) שחושב על-ידי איטרציות (iterate).

iterate	approx	diff-sign
0	3.6666666666666666666	-1
1	3.6	1
2	3.6060606060606060606	-1
3	3.6055045871559633027	1
4	3.6055555555555555555	-1
5	3.6055508830950378469	1
6	3.6055513114336643748	-1
7	3.6055512721665381649	1
8	3.6055512757662768167	-1
9	3.6055512754362776627	1
10	3.6055512754665297038	-1

בומבלי, בתקופתו, לא התבקש להוכיח ששיטתו אכן מתכנסת לשורש הריבועי המבוקש. אבל בימינו עלינו לספק הוכחה. נתאר להלן את מהלך ההוכחה.

הקירוב הראשון ל- $\sqrt{13}$ גדול מ- $\sqrt{13}$:

$$\left(3+\frac{2}{3}\right)^2 = 9 + 4 + \frac{4}{9} > 13$$

הקירוב השני ל- $\sqrt{13}$ קטן מ- $\sqrt{13}$:

$$\left(3+\frac{3}{5}\right)^2 = 9 + \frac{18}{5} + \frac{9}{25} < 13$$

באינדוקציה מתמטית אפשר להוכיח כי כל קירוב איזוגי גדול מ- $\sqrt{13}$ וכל קירוב זוגי קטן מ- $\sqrt{13}$, שתי ההוכחות דומות ולכן נטפל רק בקירובים האיזוגיים.

הצעד הראשון של האינדוקציה מופיע לעיל.

נניח כי $x_{2n-1} > \sqrt{13} - 3$ ונוכיח כי x_{2n+1}, הקירוב האיזוגי הבא, גם הוא גדול מ- $\sqrt{13} - 3$. לשם כך נבטא את x_{2n+1} בעזרת x_{2n-1},

$$x_{2n+1} = \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + x_{2n-1}}} > \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \sqrt{13} - 3}} = \sqrt{13} - 3$$

בשלב הבא נראה כי כל קירוב איזוגי (זוגי) קטן (גדול) מקודמו. למשל, עבור קירובים איזוגיים,

$$x_{2n-1} > x_{2n+1} \quad \text{כלומר} \quad x_{2n-1} - x_{2n+1} > 0$$

נבטא שוב את x_{2n+1} בעזרת x_{2n-1} ונשלים את ההוכחה בעזרת אלגברה.

צריך להוכיח כי ההפרש $x_{2n-1} - \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + x_{2n-1}}}$ חיובי.

נסמן את x_{2n-1} ב- k. על-ידי פישוט נקבל עבור ההפרש את הביטוי $\frac{3(k^2 + 6k - 4)}{3k + 20}$. המכנה חיובי עבור $k > -\frac{20}{3}$ והמונה חיובי עבור $k > \sqrt{13} - 3$ או $k < -\sqrt{13} - 3$. מאחר והנחנו כי $k > \sqrt{13} - 3$ הביטוי חיובי!

השיקול המסיים את ההוכחה מתבסס על כך שקירובים איזוגיים (זוגיים) הולכים וקטנים (גדלים) ותמיד הם גדולים (קטנים) מ- $\sqrt{13}$, ולכן הם מתכנסים לגבול. נותר עלינו להראות שאותו הגבול מתקבל משני הסדרות. נסמן ב- ℓ_1 את הגבול של סדרת הקירובים הזוגיים.

מאחר ו-

$$x_{2n+2} = \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + x_{2n}}}$$

נקח את הגבול של כל אגף

$$\ell_1 = \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \ell_1}}$$

נפתור את המשוואה:

$$\ell_1 = \sqrt{13} - 3$$

תשובה זהה תתקבל עבור ℓ_2 (הגבול של סדרת הקירובים האיזוגיים). ולכן שני הגבולות מתאחדים. אנו משערים שאילו נדרש בומבלי במאה ה- 16 לתת הוכחה לשיטת הקירוב היה יכול לספק את השיקולים לעיל בעזרת טכניקת ה"הצגה הכפולה" שבה השתמש בשיטתו.

תרגיל 3

כתבו נוסחה לתהליך החוזר (איטרטיבי) אשר בעזרתה נוכל לקרב $\sqrt{b}$ לפי שיטת Bombelli, (b הוא מספר טבעי כלשהו שאיננו ריבוע מדויק).

תרגיל 4

הראו שהקירוב הראשון ל- $\sqrt{b}$, לפי שיטת Bombelli, הוא גדול מהערך האמיתי של $\sqrt{b}$.

תרגיל 5

הראו כי הקירוב השני קטן מ- $\sqrt{b}$.

רשימת מקורות

Arcavi, A. Bruckheimer, M. and Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers, *For the Learning of Mathematics* 7, 18-23,

Arcavi, A. & Bruckheimer M. (1991). Reading Bombelli's x-purgated algebra. *College Mathematics Journal*, 22, 212-219. Reprinted in Anderson, M., Katz, V. and Wilson, R. (Eds.), 2004, *Sherlock Holmes in Babylon and other Tales of Mathematical History*, The Mathematical Association of America, 164-168.

Boyer, C.B. (1985). *A History of Mathematics,* New Jersey: Princeton University Press.

Dedron, P. and Itard, J. (1974). *Mathematics and Mathematicians*, Vol 2, Transworld.

Jayawardene, S.A. (1973). The influence of practical arithmetics on the algebra of Rafael Bombelli, *ISIS* 64, 510-523.

Smith, D.E. (1929). *A Source Book in Mathematics*, New York: McGraw Hill.

Smith, D. E. (1953). *History of Mathematics*, Vol. II, New York: Dover.

תשובות לתרגילים

תרגיל 1

א. הקירוב השלישי המתקבל על-ידי (א) חלוקת 4 ב- $6\frac{3}{5}$ והתוצאה $\frac{20}{33}$, (ב) הוספת התוצאה ל- 3 ומקבלים $3\frac{20}{33}$. ריבוע המספר הוא $13\frac{4}{1089}$. הטעות היא, אם כך, $\frac{4}{1089}$, או מעוגלת בכתיב עשרוני 0.00367309.

ב. הקירוב הרביעי יתקבל אם נחלק 4 ב- $6\frac{20}{33}$, התוצאה $\frac{66}{109}$, בהוספת 3 מקבלים $3\frac{66}{109}$. זה קירוב טוב יותר מהקודם כי ריבועו בהצגה עשרונית מעוגלת 12.99966332 והטעות 0.00033668.

תרגיל 2

$$(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 2$$

$$2x + x^2 = 1$$

אם נתעלם מ- x^2 נקבל $x_1 = \frac{1}{2}$

ולכן הקירוב הוא $1\frac{1}{2}$, שריבועו $2\frac{1}{4}$.

נמשיך, כעת, לפי התהליך:

$$2x_2 + \frac{1}{2}x_1 = 1$$

$$2\frac{1}{2}x_2 = 1$$

$$x_1 = \frac{b - a^2}{2a}$$

ולכן הקירוב השני הוא $1\frac{2}{5}$ $(\sqrt{2} \approx 1.4)$, שריבועו $1\frac{24}{25}$.

השלב הבא:

$$2x_3 + \frac{2}{5}x_3 = 1$$

$$x_3 + \frac{1}{2\frac{2}{5}} = \frac{5}{12}$$

ולכן הקירוב השלישי הוא $1\frac{5}{12}$ (1.416). וכן הלאה. דרושים שני שלבים נוספים להגיע לדיוק המבוקש 1.4142.

תרגיל 3

נניח ש- a הוא מספר כך שריבועו הוא הריבוע המדויק הכי גדול שהוא קטן מ- b, כלומר

$$a^2 < b < (a+1)^2$$

לכן קיים $0 < x < 1$ כך ש:

$$(a+x)^2 = b$$

$$a^2 + 2ax + x^2 = b$$

$$2ax + x^2 = b - a^2$$

לקירוב ראשון, מזניחים x^2, (כיוון ש- $x < 1$ ולכן x^2 קטן ביחס ל- $2ax$), ואז נקבל

$$2ax_1 = b - a^2$$

$$x_1 = \frac{b - a^2}{2a}$$

לקירוב שני נכתוב:

$$2ax_2 + x_1 \cdot x_2 = b - a^2$$

$$(2a + x_1) \cdot x_2 = b - a^2$$

$$x_2 = \frac{b - a^2}{2a + x_1}$$

ואם נכליל

$$x_{n+1} = \frac{b - a^2}{2a + x_n}$$

יש לזכור שהקירוב ה- n ל- $\sqrt{b}$ הוא $a + x_n$.

תרגיל 4

לפי מה שראינו בשאלה הקודמת הקירוב הראשון ל- $\sqrt{b}$ הוא $a + x_1$.

$$(a + x_1)^2 = a^2 + 2ax_1 + x_1^2$$

אבל כיוון שקירבנו כך: $a^2 + 2ax_1 = b$

מתקיים: $(a + x_1)^2 = b + x_1^2 > b$

תרגיל 5

לפי הנוסחה האיטרטיבית

$$x_2 = \frac{b - a^2}{2a + x_1}$$

$$(2a + x_1) \cdot x_2 = b - a^2$$

$$[(a + x_1) + a] \cdot x_2 = (\sqrt{b} - a) \cdot (\sqrt{b} + a)$$

אבל $a + x_1$ הוא הקירוב הראשון ל- $\sqrt{b}$ והראנו כי

$$a + x_1 > \sqrt{b}$$

ולכן אם נכתוב $\sqrt{b}$ במקום $a + x_1$ נקבל:

$$(\sqrt{b} + a) \cdot x_2 < (\sqrt{b} - a) \cdot (\sqrt{b} + a)$$

נחלק בשני האגפים ב- $\sqrt{b} + a$

נקבל $x_2 < \sqrt{b} - a$

כלומר $a + x_2 < \sqrt{b}$

וזה אומר שהקירוב השני הינו קטן מ- $\sqrt{b}$.

בדרך דומה נוכל להראות שהקירוב השלישי הוא גדול מ- $\sqrt{b}$.
אם נמשיך בתהליך זה נוכל לגלות שקירוב שנעשה בצעד שהוא זוגי יהיה תמיד קטן מהערך האמיתי,
בזמן שקירוב בצעד אי-זוגי יהיה תמיד גדול מהמספר.
בכתיב מתמטי נבטא זאת כך:

עבור $n \varepsilon N$

$$a + x_{2n} < \sqrt{b}$$

$$a + x_{2n-1} > \sqrt{b}$$