התפתחות הפונקציות הטריגונומטריות

מאת: יהודית מוהלרד בעריכת חנה פרל

הקדמה

מאמר זה מבוסס על עבודת הגמר לסיום בית הספר התיכון מאת יהודית מוהלרד בהדרכת פרופסור מקסים ברוקהיימר ממכון ויצמן למדע.

העבודה מתארת את ההתפתחות של הטריגונומטריה המישורית והכדורית במשך הדורות ומכילה הוכחות והסברים לכל התוצאות המתמטיות החשובות*.

המאמר, דן רק בטריגונומטריה המישורית ומופיעות בו התוצאות ללא הוכחות.

מבוא

אפשר לראות את צעדיה הראשונים של הטריגונומטריה במצרים העתיקה לפני כ- 4500 שנה. בתחילתה היתה הטריגונומטריה חלק מהגיאומטריה ונועדה לשרת את האסטרונום בחישוביו המסובכים. רק בתקופה מאוחרת יותר הפכו המונחים הטריגונומטריים מיחסים גיאומטריים בלבד, לפונקציות המוגדרות כהתאמה מקבוצת התחום אל הטווח, הניתנות לגזירה ואינטגרציה.

את התפתחות הטריגונומטריה אפשר לחלק לשלוש תקופות עיקריות, התקופה הטרום-טריגונומטרית, התקופה בה הטריגונומטריה היא חלק מהגיאומטריה והתקופה המודרנית, בה הטריגונומטריה היא חלק מהאנליסה.

במאמר זה נתאר בקצרה את שלבי ההתפתחות השונים ואת ההישגים החשובים של כל תקופה.

I. התקופה הטרום-טריגונומטרית (1700-150) לפני הספירה

תקופה זו מתחילה במצרים העתיקה עם בניית הפירמידות, ומסתיימת עם עליית בית תלמי (היווני) לשלטון. בתקופה זו המונחים הטריגונומטריים עדיין אינם קיימים והמתמטיקאים מדברים על מידות אורך הקשורות לזוויות. הבעיות הטריגונומטריות הראשונות המוכרות לנו הן הבעיות המופיעות על גבי פפירוס רינד (Rhind) הקשורות בתיכנון הפירמידות. מהכתוב מתברר, כי המצרים רצו לשמור על שיפוע אחיד של הפאות הצדדיות, ולשם כך חישבו את $ctg\ \alpha$ מבלי לקרוא לערך זה בשם (ראה ציור).

הנה בעיה מתוך פפירוס רינד המתארת חישוב כזה.

<u>נתון</u>: גובה הפירמידה 250 אמה

צלע הבסיס 360 אמה

---

* הרשימה הביבליוגרפית של עבודת הגמר מודפסת בסוף המאמר.

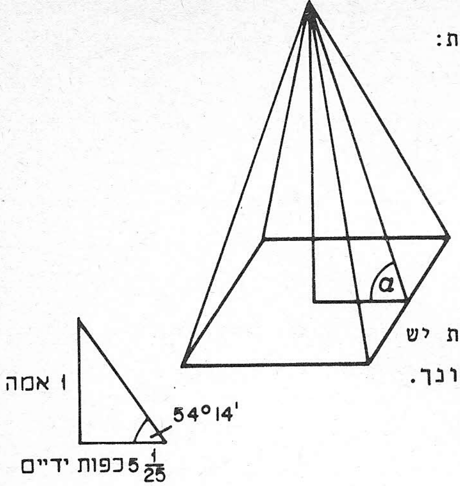
כך מחשב הסופר המצרי את שיפוע הפאה הצדדית:

א) $\frac{1}{2}\cdot 360 = 180$

ב) $\frac{180}{250} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50} = \frac{36}{50}$

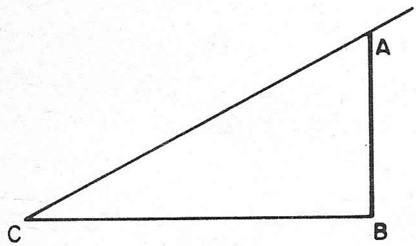
ג) באמה אחת יש 7 כפות ידיים לכן:

$7(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}) = 5\frac{1}{25}$ כפות ידיים



פירושו של דבר הוא כי לכל גובה של אמה אחת יש להתאים אורך של $5\frac{1}{25}$ כפות ידיים בכיוון מאונך.
הגודל המתואר, מוכר לנו כיום כ $\operatorname{ctg}\alpha$.
ההסבר לחישובים אלה לא מופיע בפפירוס.

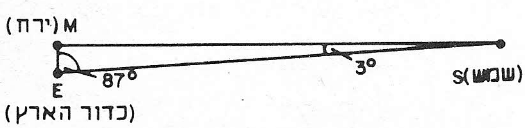
עדות נוספת לטריגונומטריה העתיקה אפשר למצוא בכתבי ההיסטוריון היווני הרודוטוס (Herodotus), בערך ב 450 לפני הספירה. הוא מספר על שעון השמש שהיוונים קיבלו מהבבלים. שעון זה שימש לא רק למדידת שעות היום, אלא גם למדידת אורך השנה. השעון בנוי ממקל ניצב AB (ראה ציור) הנקרא גנומון (Gnomon), המטיל את צל CB. (השמש נמצאת בהמשך הישר CA). הצל הארוך ביותר נוצר באמצע החורף כאשר השמש נמצאת דרומית ביותר ואילו הצל הקצר ביותר נוצר באמצע הקיץ כאשר השמש היא בכיוון הצפוני ביותר, בצורה זו משמש הגנומון למדידת השנה.



מכיון שאורך המקל קבוע הרי שאורך הצל תלוי בזווית ACB, במלים אחרות, CB פרופוציוני ל $\operatorname{ctg}\sphericalangle ACB$.
יש לשער כי הבבלים ידעו עובדה זו, למרות שלא נתנו שם מיוחד לקשר זה. כמו כן סביר להניח כי את תכונות שעון השמש הם גילו מתוך תצפיותיהם ולא על ידי חישובים.

גם ביוון מבחינים בתוצאות טרום-טריגונומטריות. המתמטיקאי הראשון בתקופה זו הוא תלס היווני (Thales) שחי בשנים 547-646 לפני הספירה. תלס מדד את גובה הפירמידות על ידי מדידת אורך צילן.

דוגמה מאלפת לחישובים טרום טריגונומטריים היא חישוב המרחקים שבין כדור הארץ, השמש והירח. אריסטרכוס היווני (Aristarchus) שחי בשנים 210-310 לפני הספירה ראה, כי כאשר הירח מופיע בחצי גודלו,



הזווית שבין קו הראיה מכדור הארץ לירח, לבין קו הראיה מכדור הארץ לשמש, קטנה ב $\frac{1}{30}$, מזווית ישרה, דהיינו ב $3°$ כלומר: $\sphericalangle MES = 87°$.
כמו כן הוא ידע, כי באותו זמן $\sphericalangle EMS = 90°$.

כיום נאמר כי: $\frac{ME}{SE} = \sin 3°$

אריסטרכוס ביצע חישובים ארוכים ומסובכים ותוך כדי עבודתו השתמש ביחס גיאומטרי אשר אנו היינו כותבים:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta}$$

כאשר: $0° < \beta < \alpha < 90°$

בעזרת יחס זה הוא קיבל את התוצאה כי $\frac{1}{20} < \sin 3° < \frac{1}{18}$ והסיק כי מרחק השמש מכדור הארץ גדול יותר מאשר פי שמונה עשר ממרחקו של הירח מכדור הארץ אך קטן מאשר פי עשרים; המרחק הנכון הוא בערך פי 350.

השגיאה איננה נובעת מטעות מתמטית, חישוביו של אריסטרכוס נכונים אך המדידות שביצע לא היו מדויקות. לאחר שקיבל תוצאה זו השתמש בנתון זה וחישב את הרדיוס היחסי של כדור הארץ, מתוך ההנחה שהמרחקים והרדיוסים מתיחסים זה לזה ביחס שווה. את הנחה זו הוא ביסס על העובדה שהירח והשמש נראים לאנשי כדור הארץ כמעט בגודל שווה.

II. התקופה הגיאומטרית (150 לפני הספירה - 1400 לספירה)

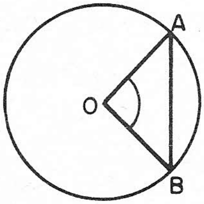
תקופה זו מתחלקת למספר תקופות משנה המופיעות בסדר כרונולוגי:

א. הטריגונומטריה היוונית

ב. הטריגונומטריה ההינדית

ג. הטריגונומטריה הערבית

ד. הטריגונומטריה האירופית



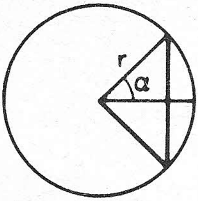
א. הטריגונומטריה היוונית

תקופה זו מתחילה עם עליית בית תלמי לשלטון. בשלב זה מטפלים החוקרים במיתרים במעגל, כאשר הרעיון המרכזי הוא כי אורך המיתר AB קשור לגודל הזוית המרכזית AOB.

הראשון שערך טבלה טריגונומטרית הוא היפרכוס (Hipparchus) שחי בין השנים 125-180 לפני הספירה. היפרכוס הלך בדרכם של הבבלים וחילק את המעגל ל 360 חלקים שווים ואת הקוטר ל 120 חלקים.

הקשר בין $\sin\alpha$ לאורך המיתר אשר היוונים השתמשו בו הוא:

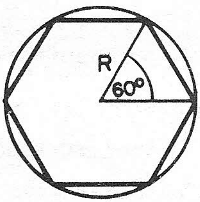
$$\sin\alpha = \frac{\text{המיתר המתאים לזווית } 2\alpha}{2r}$$



היפרכוס ידע גם כי במעגל נתון כאשר הזווית המרכזית הולכת וקטנה מ 180° ל 0° אזי היחס שבין אורך הקשת למיתר המתאים לה קטן ושואף לגבול 1 וזאת כאשר מודדים את אורך הקשת ברדיאנים.

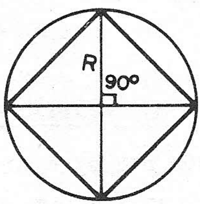
את עבודתו הרבה של היפרכוס מתאר תלמי (Ptolemy) היווני (125-151 לפני הספירה בסיפרו <u>Mathematical Syntaxis</u>. ספר זה הוא סיכום כל הטריגונומטריה שהיתה ידועה עד אז ותוספות עצמיות מקוריות שלו. תלמי, כקודמו היפרכוס, אף הוא מחלק את המעגל ל 360 חלקים, את קוטר המעגל ל 120 חלקים וכל חלק ל 60 חלקים נוספים. ל $\frac{1}{360}$ מהמעגל קרא תלמי "מעלה", ל $\frac{1}{60}$ של "המעלה" קרא "דקה", ול $\frac{1}{60}$ מהדקה "שניה".

תלמי חישב תחילה את מיתרי הזוויות 36°, 72° על פי משפטים גיאומטריים מספרו של אוקלידס (Euclid) ומצא כי ל 36°, מתאים מיתר שאורכו $\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ול 72° מיתר באורך $\frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, כאשר R הוא רדיוס העיגול.



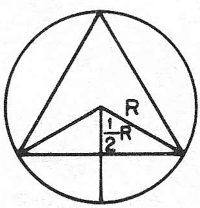
את המיתר המתאים ל 60° חישב באמצעות משושה משוכלל:

$R =$ מיתר של 60°



המיתר המתאים ל- 90° הוא:

$\sqrt{2}\,R =$ מיתר של 90°

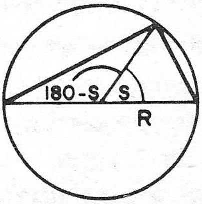


והמיתר המתאים ל 120° הוא:

מיתר של 120° $= 2R^2 - \frac{1}{4}R^2 = \sqrt{3}\,R$

עתה מוכיח תלמי את המשפט הבא: $(2R)^2 = (\text{מיתר של } (180-s))^2 + (\text{מיתר של } s)^2$

כאשר s זווית הקטנה מ $180°$.



באמצעות תבנית זו הוא מחשב את המיתרים

המתאימים ל $144°$ $(=180° - 36°)$

ו $108°$ $(=180° - 72°)$

תלמי מגיע למשפטים גיאומטריים המוכרים לנו כיום כתבניות הטריגונומטריות:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

בעזרתם ממשיך תלמי ובונה את לוח המיתרים.

למשל: $$\frac{\text{מיתר } 12°}{2R} = \sin 6° = \sin(36° - 30°)$$

וכך הלאה.

הטבלה הגמורה היתה טבלת סינוסים לזווית בהפרש של $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$ עם דיוק של 6 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

ב. <u>הטריגונומטריה ההינדית</u>

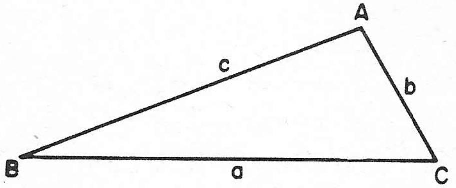
תקופה זו מתחילה לאחר שקיעת האימפריה היוונית. חשיבותה הרבה היא לא בקידום הטריגונומטריה כי אם בשמירה על הטריגונומטריה היוונית והעברתה אחר כך לערבים. בתחילת המאה הרביעית הפכה הודו למרכז המדע והרפואה והחל מהמאה החמישית אנו מוצאים בה אסטרונומים התורמים את חלקם לפיתוח הטריגונומטריה. במאה הששית מתמטיקאי בשם ורהמיהירה (Varahamihira) מחליף את המיתר היווני בחצי המיתר, ובכך הוא מקרב אותנו לסינוס המוגדר במשולש ישר זווית.

שני מתמטיקאים חשובים באותה תקופה הם שני ההינדים אריאבהטה (Āryabhta). קשה להבחין בין עבודותיהם ולכן מקובל להתייחס אליהם כאל אחד. אריאבהטה הוא הראשון שבנה לוח סינוסים אמיתי וקרא לסינוס בשם ג'יה-ארדהה (jyā-ardhā) ובקיצור ג'יה. במאה העשירית עבר שם זה לערבים אשר ביטאו אותו כג'יבה. מכיון שלמילה זו לא היתה כל משמעות בעיניהם הפכו אותה לג'יב, שפירושה מפרץ או חיק. בתקופה מאוחרת יותר בערך ב 1150 לספירה תירגמו את המילה ג'יב ללטינית והיא הפכה ל"סינוס" שפירושה מפרץ, חיק או עקום.

ג. הטריגונומטריה הערבית

המדע הערבי החל לעלות לגדולה עם כינון האימפריה הערבית במאה השביעית. בשנת 755 התפצלה האימפריה הענקית לשני חלקים. החלק המזרחי, שבירתו היתה בגדד, החזיק מעמד עד 1258 לספירה ואילו החלק המערבי, שמרכזו היה בקורדובה, המשיך להתקיים עד 1400 לספירה.

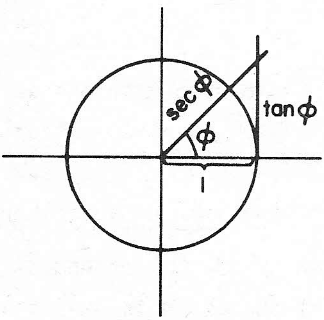
בתקופה זו תירגמו הערבים את כתבי היוונים ואף תרמו רבות לקידום המדע. מתמטיקאי חשוב באותה תקופה הוא אבו'ל-ווּפה (Abu'l-Wefa) שחי בשנים 940-998 לספירה.



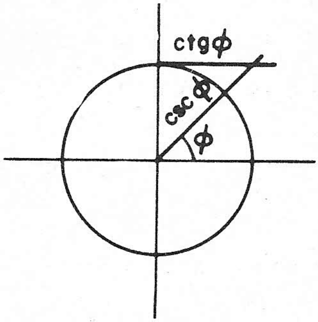
מייחסים לו את משפט הסינוסים:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

למרות שמשפט זה פורסם רק במאה ה 13 על ידי נסר-אד-דין (Nasir Ed-din) אבול-ווּפה הוא הראשון שהגדיר את הטנגנס במעגל היחידה וכן את הסקנט והקוסקנט.



$$\sec^2\phi = 1 + tg^2\phi$$



$$\csc^2\phi = 1 + ctg^2\phi$$

מידות אורך אלו הוגדרו על ידו כמידות החשובות למדע האסטרונומיה.

בערך ב 1008 לספירה הופיעה לראשונה התבנית:

$$2\cos x \cos y = \cos(x + y) + \cos(x - y)$$

ובמאה ה 13 הופיע ספרו של נסר-אד-דין ובו מופיעה לראשונה הטריגונומטריה באופן עצמאי ללא קשר לאסטרונומיה.

ד. הטריגונומטריה האירופית

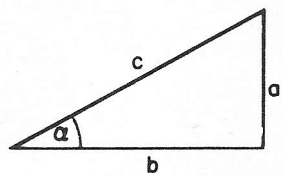
הרומאים בניגוד ליוונים לא התענינו כלל במתמטיקה תאורטית ובתקופתם שקע המדע. החל מהמאה ה 11 החלה התרבות המוסלמית לחדור לאיטה לאירופה ועם נפילת קונסטנטינופול ב 1453 החלו לנהור לאיטליה רבבות פליטים שהביאו עימם את התרבות היוונית. במאה ה 15 הופיע ספרו של רג'יומנטנוס הגרמני (Regiomontanus) De triangulis omnimodus שעיקרו פיתרון בעיות במשולשים בעזרת טריגונומטריה.

המתמטיקאי הגרמני רטיקוס (Rheticus) פרסם במאה ה 16 את הספר: Opus palatinum de triangulis. תרומתו הרבה בספר זה היא הגדרת הגדלים הטריגונומטריים כיחסים במשולש ישר זווית ולא כמידות אורך המוגדרות על ידי קשתות במעגל.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$tg \ \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{b}$$



שיטה זו כבר הופיעה קודם ב 1330 לספירה אך קיבלה תוקף עם הופעת ספר זה. תרומה נוספת של רטיקוס היא הנוסחה:

$$\cos n\phi = \cos(n-2)\phi - 2\sin\phi \sin(n-1)\phi$$

ואותה הוא הוכיח בדרך גיאומטרית.

מתמטיקאי מפורסם בתקופה זו הוא פרנסואה וייט (Francois Viète) שחי בשנים 1540-1603. הוא התייחס לטריגונומטריה באופן רחב יותר ותרם רבות לקידום הטריגונומטריה. מייחסים לו את המשפטים הבאים:

א) משפט הטנגסים

$$\frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{a-b}{2}} = \frac{tg\frac{A+B}{2}}{tg\frac{A-B}{2}}$$

ב) תבניות ההופכות סכום למכפלה:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ג) תבניות לחישוב $\cos n\phi$ ו $\sin n\phi$ מתוך ידיעת $\cos\phi$ ו $\sin\phi$ בלבד.

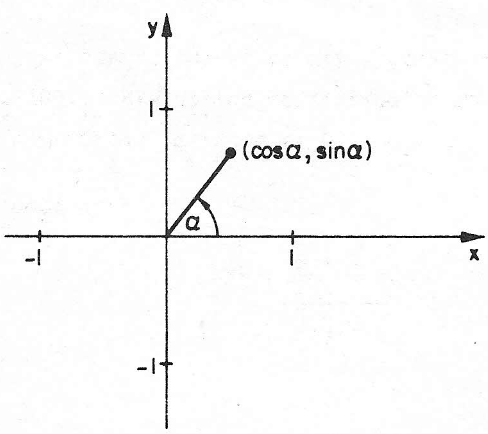
ד) משפט הקוסינוסים.

$$\frac{2ab}{a^2+b^2-c^2} = \frac{1}{\sin(90^\circ - C)}$$

III. הטריגונומטריה המודרנית

אחד מההישגים החשובים של הטריגונומטריה בתקופה המודרנית הוא המעבר מהגישה הגיאומטרית לגישה הפונקציונלית. אחת מהצורות המקובלות כיום לתיאור הפונקציה סינוס וקוסינוס היא על ידי וקטור יחידה המסתובב במערכת הצירים, כאשר ציר הסיבוב שלו הוא ראשית הצירים. לכל סיבוב מתאימים את קואורדינטות הנקודה אליה הגיע קצה הוקטור ומגדירים את שתי הפוקנציות:

$$x = \cos\alpha\ ,\ y = \sin\alpha$$



ברגע שמתייחסים לסינוס ולקוסינוס כאל פונקציות, הרי שהן ניתנות לגזירה לאינטגרציה, לפיתוח לטורים אינסופיים וכו'. כיום מטפלים בפונקציות אלה מבלי להתייחס כלל למשמעויות הגיאומטריות שלהן, אלא רק לתכונותיהן הפונקציונליות.

הסימן הראשון (הידוע לנו) לשינוי הגישה ניתן על ידי המתמטיקאי רוברבל (Roberval) ב 1635 באיטליה, כאשר הצליח לשרטט חצי מקשת גרף הסינוס. רוברבל גם הראה את הטענה אשר בסימונינו כיום היא:

$$\int_a^b \sin x \, dx = \cos b - \cos a$$

במחצית השניה של המאה ה- 17 פיתחו ניוטון האנגלי (Newton) ולייבניץ הגרמני (Leibniz) את יסודות החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי ובכך סללו את הדרך לגזירה ואינטגרציה של פונקציות.

ניוטון וגם לייבניץ ביטאו פונקציות באמצעות טורים אינסופיים וביניהם גם את הסינוס והקוסינוס

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

בתחילת 1700 גילו מחדש האחים ברנולי (Jean and Jacques Bernoulli) בשוויץ, את הסידרה ל $\sin n\theta$ ו $\cos n\theta$ במונחים של $\sin\theta$ ו $\cos\theta$.

ג'ין ברנולי הצליח לפתח ב 1702 את הקשר: $\operatorname{arctg} z = \frac{1}{i} \operatorname{tg} \frac{1 + iz}{1 - iz}$ שבין הפונקציות הטריגונומטריות ללוגריתמים.

ג'ין ברנולי היה מראשוני המתמטיקאים שפיתח את הטריגונומטריה והלוגריתמים מנקודת מבט אנליטית ובכתביו אנו מוצאים מספר נסיונות להגדיר את המושג פונקציה ולסמנה. אחת מהצורות, דומה לסימון המקובל בימינו והיא ϕx, אולם ההגדרה הכתובה היא מאוד מעורפלת "כמות המורכבת בצורה כלשהיא ממשתנה ומספר קבועים".

תורם חשוב נוסף לקידום הטריגונומטריה הוא דה מואבר (De Moivre) הצרפתי אשר ב- 1738 פרסם את הספר: Miscellanea Analytica בו משתמש המחבר במשפט הקרוי על שמו: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

במחצית השניה של המאה ה 18 הפך אוילר (Leonard Euler) משוויץ, את החשבון הדיפרנציאלי לחלק מהאנליזה המתמטית, וב 1748 הוא פירסם את הספר: Introductio in analysin infinitorum המהווה את אבן היסוד בנושא זה ומהווה קרש קפיצה למתמטיקה המודרנית.

עד הופעת ספר זה היה מושג ה"פונקציה" מושג כללי שלא הוגדר באופן ברור. דקרט (Descartes) ופרמה (Fermat) בעבודתם בגיאומטריה אנליטית, וגם ניוטון ולייבניץ במחקריהם בחשבון דיפרנציאלי, השתמשו במושג מעורפל של הפונקציה, ורק אוילר הגדיר מושג זה בצורה מפורשת. בקטע הרביעי בספרו מגדיר המחבר: "פונקציה של גודל משתנה היא ביטוי אנליטי הבנוי מהכמות המשתנה וממספרים או גדלים קבועים". לעיתים התייחס אוילר לפונקציה בצורה לא פורמלית כאל קשר בין שתי הקואורדינטות של נקודות הנמצאות על עקום המשורטט במישור. כיום גם הגדרה זו איננה "טובה" וכי מהו "ביטוי אנליטי"? הטיפול האנליטי הטהור בפונקציות הטריגונומטריות הוא אחד מההישגים המרשימים של הספר של אוילר. הסינוס כבר איננו קטע של ישר כי אם <u>מספר</u>, קואורדינטה של נקודה על מעגל היחידה או מספר המתואר על ידי הסידרה:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \quad \ldots$$

מהסדרות האינסופיות ל e^x, sinx ו cosx קיבל אוילר את התבניות הידועות בשם זהויות אוילר:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

<u>ביבליוגרפיה</u>

1. Carl B. Boyer: A History of Mathematics, John Wiley & Sons, 1968.

2. A Von Braunmühl: Geschichte der Trigonometrie, B.G. Teubner, 1900, 1903.

3. Moris Kline: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times Oxford University Press, 1972.

4. David Eugene Smith: History of Mathematics, Dover Publications 1958.