תבניות מספר במעגל סגור

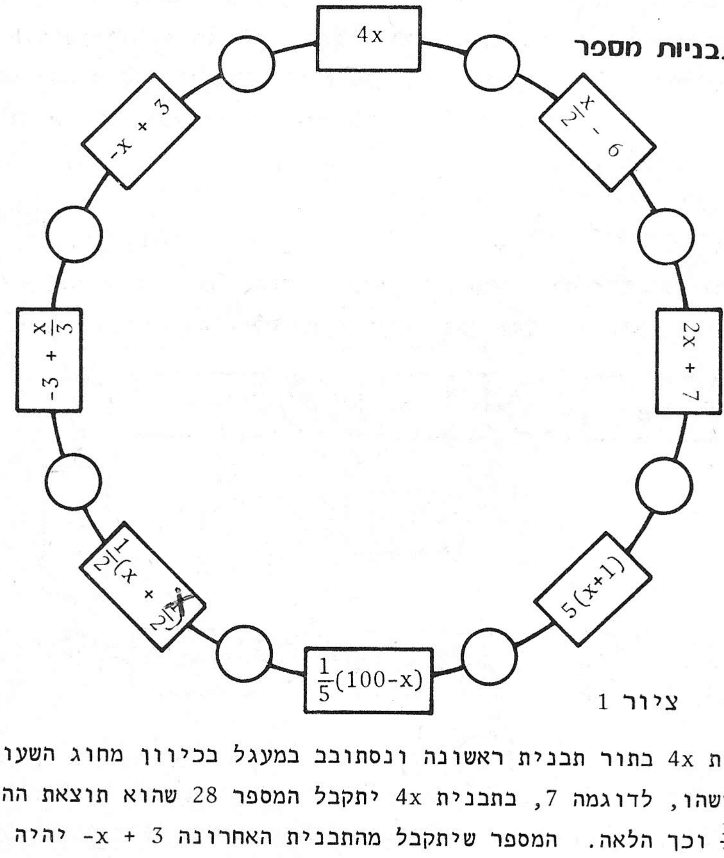
מאת: מ. ברוקהיימר ונורית זהבי

המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע

בתכנית הלימודים במתמטיקה מופיע הנושא פונקציה לינארית כנושא אלמנטרי ודומה שאין בו משהו מיוחד. בכל זאת ניתן, כמו בנושאים אלמנטריים אחרים במתמטיקה, להעשיר אותו ולעסוק בהרבה מאוד מתמטיקה הקשורה בו ובתחומים אחרים. במאמר זה נצביע על אפשרויות אחדות להרחבת הנושא.

באוסף עבודות סיכום במתמטיקה לתלמידי כיתות ט' מופיעה שאלה שנקראת "תבניות מספר במעגל סגור"*. נתבונן מעבר למסך שעליו מופיעה השאלה, אל המתמטיקה המעסיקה את המורה.

מעגל סגור של תבניות מספר



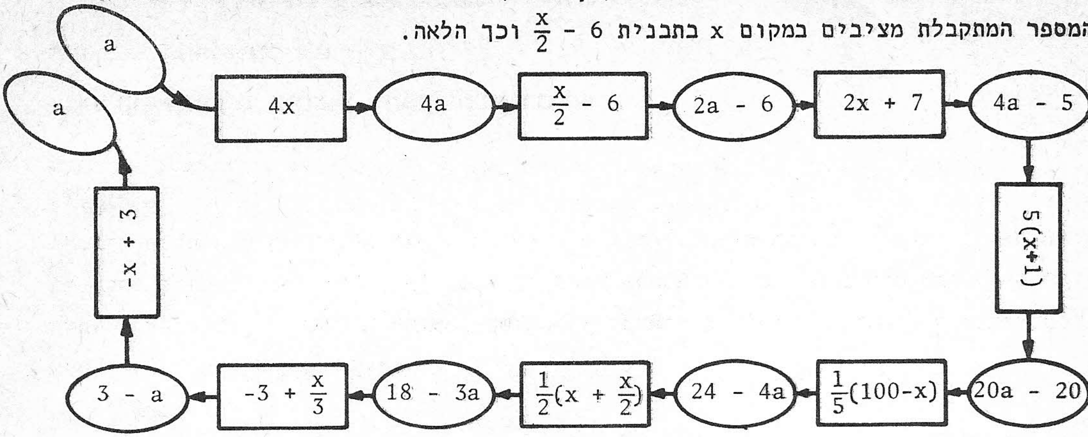
ציור 1

נתייחס אל התבנית $4x$ בתור תבנית ראשונה ונסתובב במעגל בכיוון מחוג השעון. אם נציב מספר כלשהו, לדוגמה 7, בתבנית $4x$ יתקבל המספר 28 שהוא תוצאת ההצבה, נציב 28 בתבנית $\frac{x}{2} - 6$ וכך הלאה. המספר שיתקבל מהתבנית האחרונה $-x + 3$ יהיה 7, כלומר אותו המספר שהצבנו בתבנית $4x$.

---

*עבודה זו היא חלק מאוסף נוסף של עבודות סיכום שייצא בקרוב בהוצאת המחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן למדע. אוסף ראשון של עבודות הופיע בשבבים, תיק מס' 7.

נשאלת השאלה, האם בדיקות מספריות אחדות (כמה?) מספיקות, או שדרושה הוכחה כללית. הוכחה כללית מתקבלת אם מציבים משתנה (a, למשל) ולא מספר בתבנית $4x$ ואת תבנית המספר המתקבלת מציבים במקום x בתבנית $\frac{x}{2} - 6$ וכך הלאה.

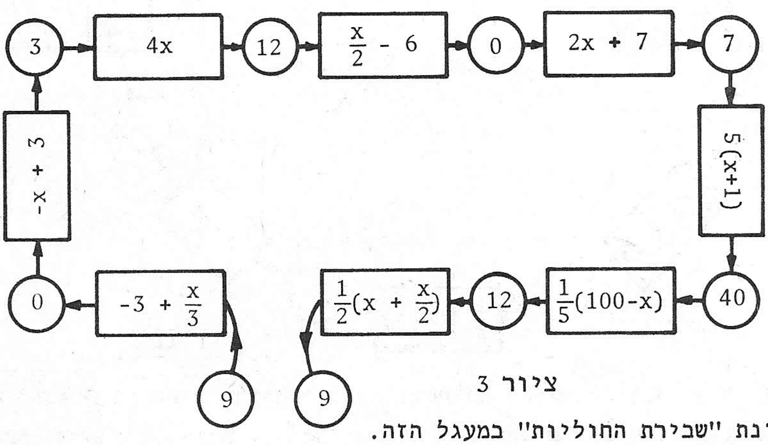


ציור 2

למעשה מספיקה בדיקה עבור שני מספרים בלבד כדי להבטיח שאכן כל מספר הנכנס הוא גם המספר היוצא. זאת מאחר וכל התבניות הן ליניאריות ($ax + b$, $a \neq 0$) ובעצם מדובר כאן בהרכבת פונקציות ליניאריות. תוצאת ההרכבה היא פונקציה ליניארית (נראה זאת בהמשך) אשר נקבעת על ידי שני זוגות סדורים. מנקודת מבט גאומטרית, הגרף של פונקציה ליניארית הוא קו ישר וכידוע, קו ישר נקבע על ידי שתי נקודות.

שבירת חוליות

למעגל זה יש תכונה מעניינת נוספת. בכל מקום שבו ינותק המעגל ונתחיל להכניס מספר מסויים - מספר זה יהיה גם הפלט בתום סיבוב שלם (בכיוון השעון). לדוגמא:



ציור 3

נוכיח את תכונת "שבירת החוליות" במעגל הזה.

נסתכל על הפונקציות הליניאריות המתקבלות מהתבניות: $f_1(x) = 4x$, $f_2(x) = \frac{x}{2} - 6$...

ראינו כי תוצאת הרכבתן, זו אחרי זו, לפי הסדר היא פונקצית הזהות $f(x) = x$ אשר נהוג לסמן אותה באות I (Identity).

כלומר: $f_8 \circ f_7 \circ f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 = I$

<u>הערה</u>: לא רשמנו סוגריים, מאחר וקיים חוק הקיבוץ לגבי הרכבת פונקציות.

נוכיח שאם נפתח את המעגל בכל מקום, למשל, בין התבנית השישית והשביעית (ציור 3) גם אז תתקבל פונקצית הזהות.

אם כך, צ"ל: $f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ f_8 \circ f_7 = I$

הוכחה: בשל קיומו של חוק הקיבוץ ניתן לרשום:

$$f_8 \circ f_7 \circ f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 = (f_8 \circ f_7) \circ (f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)$$

נסמן את הפונקציות שבסוגריים F ו- G ואם כן, $F \circ G = I$

פונקציות לינאריות הן חד-חד ערכיות ועל ולכן הן בעלות פונקציה הפוכה.

מזה נובע ש F ו G הפוכות זו לזו ולכן גם $G \circ F = I$

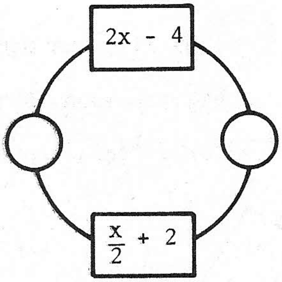
ואם כך: $(f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1) \circ (f_8 \circ f_7) = I$

אפשר להשמיט את הסוגריים ומתקבל מה שרצינו להוכיח.

<u>הערה</u>: ברור שאפשר לשים את הסוגריים גם במקום אחר, כלומר, לשבור את החוליות, בתנאי שמקפידים לשמור על הסדר והכיוון במעגל.

כיצד מחברים מעגלים סגורים?

קיימות אפשרויות טריויאליות, למשל ע"י בחירת שתי פונקציות הפוכות זו לזו אפשר לבנות מעגל סגור בן שתי תבניות.



ציור 4

ברור שאפשר לבנות מעגלים מזוגות של פונקציות הפוכות זו לזו, בתוספת פונקצית הזהות.

למעגלים מסובכים יותר נציע שיטה:

תוצאת ההרכבה של פונקציות לינאריות היא פונקציה לינארית. פונקציה לינארית נקבעת על ידי שני זוגות סדורים. נניח שרוצים לחבר מעגל שבו 10 תבניות מספר, רושמים 9 כלשהן ומעבירים דרכן שני מספרים כלשהם - למשל 0 ו 1. נסמן את התוצאה המתקבלת עבור 0 אחרי התבנית התשיעית ב- p ואת התוצאה המתקבלת עבור 1 אחרי התבנית התשיעית ב- q. נחפש את התבנית המתאימה ל p את 0 ול q את 1, זו תהא התבנית העשירית.

הפונקציה העשירית היא הפונקציה ההפוכה לתוצאת ההרכבה של תשע הפונקציות הראשונות. (למעשה כל אחת מבין עשר הפונקציות הפוכה להרכבה של תשע האחרות, אם שומרים על הסדר הנכון.)

נדגים זאת לגבי שלוש תבניות.

שתי הראשונות תהיינה, למשל: $2x + 3$, $7 - x$

$$0 \to \boxed{2x + 3} \to 3 \to \boxed{7 - x} \to 4$$

$$1 \to \boxed{2x + 3} \to 5 \to \boxed{7 - x} \to 2$$

נחפש תבנית לינארית $ax + b$ שאם נציב בה 4 נקבל 0, ואם נציב בה 2 נקבל 1

$$\begin{array}{c} a \cdot 4 + b = 0 \\ a \cdot 2 + b = 1 \\ \hline \end{array}$$

נפתור ונקבל: $b = 2$ $a = -\frac{1}{2}$

התבנית השלישית היא: $-\frac{1}{2}x + 2$

מעגל קסמים

אם נסתובב במעגל שהופיע בציור 1 במגמה מנוגדת לכיוון השעון לא יתקבל אותו המספר בתום הסיבוב. תוצאה זו צפויה מאחר ובדרך כלל לא קיים חוק החילוף לגבי הרכבת פונקציות לינאריות. אזי נשאלת השאלה, האם ניתן לבנות מעגל "קסמים" שבו מותר להסתובב בשני הכיוונים?

התשובה חיובית ונציע כאן שיטות ודוגמאות לכך.

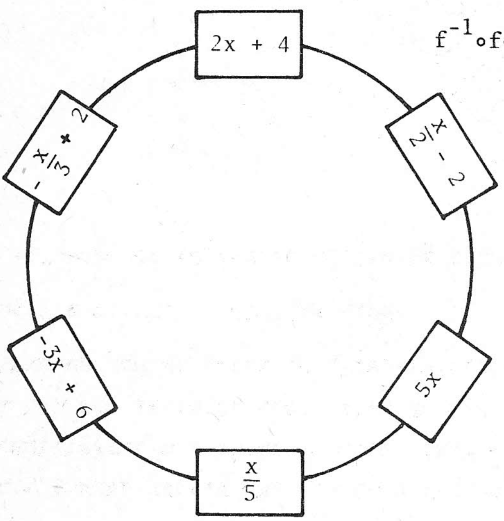
א. ניתן להרכיב מעגל (ציור 5) הבנוי מזוגות של פונקציות הפוכות זו לזו:

$$f^{-1} \circ f \circ g^{-1} \circ g \circ h^{-1} \circ h = I$$

ברור שבמעגל זה מתקיים

$$h \circ h^{-1} \circ g \circ g^{-1} \circ f \circ f^{-1} = I$$

לא חייב להתקיים חוק החילוף לגבי הרכבת כל שתי פונקציות סמוכות, למשל g^{-1} ו f.



ציור 5

ב. מעגל קסמים יתקבל אם נבנה אותו מפונקציות אשר לגבי הרכבת כל שתיים מהן קיים חוק החילוף. (הדוגמא ב- **א.** מראה כי תנאי זה אינו הכרחי.)

מהו התנאי לקיום חוק החילוף בהרכבת שתי פונקציות ליניאריות?

f ו g הן פונקציות ליניאריות $\quad f(x) = ax + b \quad a \neq 0$

$$g(x) = cx + d \qquad c \neq 0$$

$$(f \circ g)(x) = a(cx + d) + b = acx + ad + b$$

$$(g \circ f)(x) = c(ax + b) + d = acx + cb + d$$

על מנת שיתקיים שוויון הפונקציות $f \circ g$ ו $g \circ f$ הכרחי ומספיק שיתקיים השוויון:

$$ad + b = cb + d$$

נרשום זאת אחרת

$$d(1 - a) = b(1 - c)$$

במקרים המיוחדים בהם a ו/או c שווים ל 1 נטפל בהמשך.

עבור $a, c \neq 1$ נוכל לרשום את השוויון באופן שבכל אגף יופיעו פרמטרים של פונקציה אחת:

$$\frac{b}{1 - a} = \frac{d}{1 - c}$$

מה המשמעות של $\frac{b}{1 - a}$ לגבי הפונקציה f ? נראה שזהו בדיוק שיעורה של נקודת החיתוך של הפונקציה f עם הישר $y = x$ (נקודת השבת של הפונקציה).

למציאת נקודה זו עלינו לפתור את המשוואה $x = ax + b$

ואכן $\quad x(1 - a) = b$

$$x = \frac{b}{1 - a}$$

באותו אופן לגבי g נמצא שנקודת השבת מתקבלת עבור

$$x = \frac{d}{1 - c}$$

השוויון $\frac{b}{1 - a} = \frac{d}{1 - c}$ שקול לשוויון $ad + b = bc + d$ (עבור $a, c \neq 1$) ולכן התנאי: ל- f ו g אותה נקודת חיתוך עם הישר $y = x$ (או ל f ו g אותה נקודת שבת) הוא תנאי הכרחי ומספיק לכך שקיים חוק החילוף בהרכבת f ו g*.

נראה מהי משמעותו של התנאי שמצאנו לגבי המקרים המיוחדים.

אם $a = c = 1$, ברור שהשוויון $d(1 - a) = b(1 - c)$ מתקיים וגורר את קיום חוק החילוף בהרכבת שתי הפונקציות.

---

* דרך אחרת לקבלת מסקנה זו מובאת במאמר: הרכבה של פונקציות ליניאריות מאת צ'רלס סגווין, שבבים, תיק מס' 7.

הגרפים של שתי הפונקציות הם ישרים ששיפועם 1 ולכן מקבילים לישר $y = x$ וניתן לומר שנקודת החיתוך שלהם עמו היא באינסוף.

אם $c \neq 1$, $a = 1$ על מנת שיתקיים השוויון חייב להיות $b = 0$

אם $c = 1$, $a \neq 1$ על מנת שיתקיים השוויון חייב להיות $d = 0$

במקרים אלו אחד הישרים הוא $y = x$, אשר כל נקודותיו הן נקודות שבת וניתן לומר שיש לו נקודת שבת משותפת עם כל ישר החותך אותו.

את המסקנות שקבלנו לעיל ניתן לסכם גם בדרך אחרת:

הפונקציות הליניאריות $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ מהוות חבורה לגבי פעולת הרכבת פונקציות שאיבר היחידה שלהן הוא $y = x$. מסקנה מהתנאי שהוכחנו לעיל היא שקבוצה חלקית של חבורה זו הכוללת את כל הפונקציות בעלות אותה נקודת שבת מהווה חבורה חלקית קומוטטיבית.

אכן, אם לשתי פונקציות f_1 ו f_2 נקודת שבת ב t, גם להרכבה שלהן נקודת שבת ב- t.

קיים $f_1(t) = t$ $\qquad$ $f_2(t) = t$

ולכן $(f_1 \circ f_2)(t) = f_1[(f_2(t)] = f_1(t) = t$

נשתמש בזאת לתיאור שיטה לבנית מעגלי קסמים.

אם נבחר n פונקציות בעלות אותה נקודת שבת יתקיים

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1 = f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$$

כדי לקבל מעגל קסם בן 10 תבניות (למשל) נבחר 9 פונקציות ליניאריות שהן בעלות אותה נקודת שבת, הפונקציה העשירית תהיה ההפוכה להרכבת כל הקודמות והיא סוגרת את המעגל (נציין שהפונקציה ההפוכה היא בהכרח בעלת אותה נקודת שבת.)

דוגמא לבנית מעגל בן ארבע תבניות:

נחפש שלוש תבניות ליניאריות איזה שהן בעלות נקודת שבת 3 (למשל), מספיק להציב בהן מספר אחד, כי המספר השני יכול להיות נקודת השבת.

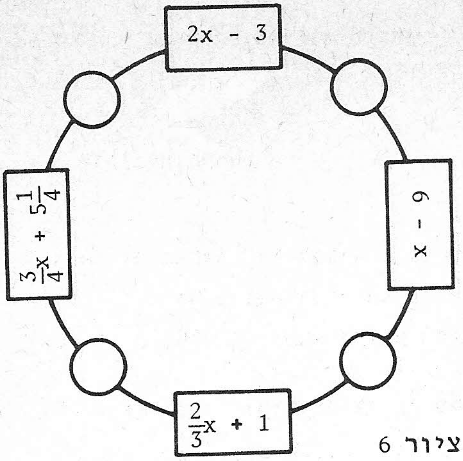
$$0 \rightarrow \boxed{2x - 3} \rightarrow -3 \rightarrow \boxed{6 - x} \rightarrow 9 \rightarrow \boxed{\tfrac{2}{3}x + 1} \rightarrow 7$$

נחפש תבנית לינארית שאם נציב 7 נקבל 0
ואם נציב 3 נקבל 3

$$a \cdot 7 + b = 0$$
$$a \cdot 3 + b = 3$$

נפתור ונקבל $b = \frac{21}{4}$ $\quad a = -\frac{3}{4}$

התבנית הרביעית היא $y = -\frac{3}{4}x + 5\frac{1}{4}$



ציור 6

ג. שתי השיטות שהופיעו לעיל התבססו על תנאים שהם מספיקים לבניית מעגלי קסם, אך אינם הכרחיים. נחפש תנאי שהוא מספיק והכרחי.
מעגל קסם צריך להיות בעל שתי תכונות:

עליו להיות סגור, כלומר תוצאת ההרכבה של כל הפונקציות, שמופיעות במעגל בזו אחר זו היא פונקצית הזהות.

ראינו בסעיפים הקודמים שאת הדאגה לסגירת המעגל אפשר להשאיר לפונקציה האחרונה, על ידי זה שמוצאים פונקציה הפוכה להרכבת כל קודמותיה.

ii) ניתן לשנות בו את מגמת הסיבוב.
נמצא עתה תנאי הכרחי ומספיק לקיום שוויון הפונקציות.

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1 = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n$$

הרכבת $n - 1$ הפונקציות הראשונות נותנת פונקציה לינארית, נסמן אותה G

$$f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_{n-1} = G$$

נסמן ב- H את תוצאת הרכבת פונקציות אלו בסדר הפוך

$$f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 = H$$

ל G ו H אותו שיפוע (המכפלה של השפועים של $f_1, \dots, f_{n-1}$)

$$G(x) = Ax + B_1$$
$$H(x) = Ax + B_2$$
$$f_n(x) = cx + d$$
$$(G \circ f_n)(x) = A(cx + d) + B_1 = Acx + Ad + B_1$$
$$(f_n \circ H)(x) = c(Ax + B_2) + d = Acx + cB_2 + d$$

על מנת שיתקיים שוויון הפונקציות $G\circ f_n$ ו $f_n\circ H$ הכרחי ומספיק שיתקיים

$$Ad + B_1 = cB_2 + d$$

נרשום זאת אחרת

$$d(1 - A) = B_1 - cB_2$$

תנאי זה מאפשר לנו למצוא n פונקציות אשר מקיימות את שוויון הפונקציות לעיל.
את $n - 1$ הראשונות נבחר באופן שרירותי ונמצא את A, B_1 ו- B_2. את המקדמים c ו d של f_n נמצא בעזרת התנאי.

אם $A \neq 1$, c יכול להיות כל מספר ואז $d = \frac{B_1-cB_2}{1-A}$

אם $A = 1$, חייב להיות $c = \frac{B_1}{B_2}$ ואז d יכול להיות כל מספר.

התנאי שמצאנו מאפשר לתת שיטה כללית לבניית מעגל קסם.

אם נרצה לבנות מעגל קסם בן 10 תבניות (למשל), נבחר 8 פונקציות ליניאריות כלשהן, את התשיעית נמצא בעזרת התנאי האחרון שמצאנו ואז יתקיים

$$f_1\circ\ldots\circ f_9 = f_9\circ\ldots\circ f_1$$

הפונקציה העשירית תהיה ההפוכה להרכבת כל הקודמות (נציין שהפונקציה ההפוכה מקיימת את התנאי הנדרש, במקרה זה $B_1 = B_2$).

מאחר וכל פונקציה במעגל היא ההפוכה של הרכבת האחרות הרי שאם נוציא מן המעגל פונקציה איזו שהיא נפסיד את תכונה (i) אבל תכונה (ii) תשמר.

דוגמא לבנית מעגל בן ארבע תבניות (ציור 7)

נבחר שתיים כלשהן $f_1(x) = 2x + 3$

$f_2(x) = 8 - x$

$f_1\circ f_2(x) = -2x + 19$

$f_2\circ f_1(x) = -2x + 5$

על פי הסימונים לעיל: $B_2 = 5$, $B_1 = 19$, $A = -2$

נבחר $c = 8$ אזי $d = -7$

לכן $f_3(x) = 8x - 7$

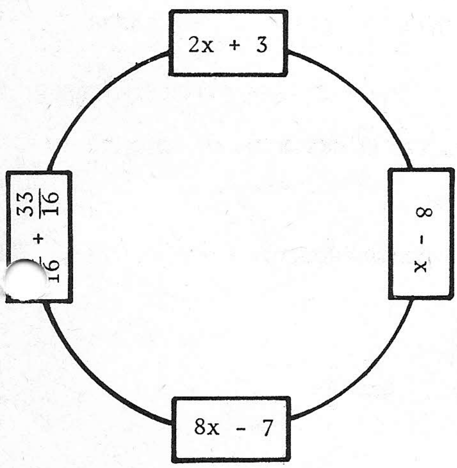
שלוש הפונקציות מקיימות:

$$f_1\circ f_2\circ f_3(x) = f_3\circ f_2\circ f_1(x) = -16x + 33$$

פונקציה הפוכה ל- $y = -16x + 33$

תהיה הפונקציה הרביעית, היינו $f_4(x) = \frac{-x}{16} + \frac{33}{16}$

והיא הסוגרת את המעגל.



ציור 7