

# מצוות ביקור חולים... ומערכת E

מאת: מרים גור ונורית זהבי

מערכת E היא מערכת דרישות המגדירה את הפונקציות המעריכיות. זוהי הגישה לנושא הפונקציות המעריכיות ב"תכנית הניסוי", ראה חוברת פרק יב' בספר אלגברה של המרכז להוראת המדעים ע"ש עמוס דה-שליט, האוניברסיטה העברית, ירושלים.

המערכת היא:

(E<sub>1</sub>) תחום f הוא R כולו.

(E<sub>2</sub>) f פונקציה מונוטונית. f איננה הפונקציה הקבועה אפס.

(E<sub>3</sub>)  $f(x+y) = f(x)f(y)$  לכל  $x, y$  ממשיים.

מורים למתמטיקה ערכו ביקור חולים ובעקבותיו....

המורה נכנסה לכיתה ורשמה על הלוח:

"אמר רבי אחא בר חנינא: כל המבקר חולה נוטל אחד מששים בצערו"

נדריים, לט - ב

היתה התרגשות ותמיהה בכיתה - זה שיעור במתמטיקה!?

כשנרגעו הרוחות ניסו התלמידים לברר את כוונת הפסוק, האם כל מבקר נוטל חלק שווה ואם כך, יבואו שישים מבקרים - והחולה יקום בריא ושלם! לצערנו, אין זה כך. כוונת הפסוק היא שכל מבקר נוטל  $\frac{1}{60}$  מצעריו של החולה באותו רגע. אם באים שניים יחד התוצאה היא כאילו באו אחד אחרי השני. אם באים שלושה יחד, התוצאה היא כאילו באו כל אחד לחוד, או שניים יחד ואחר-כך השלישי.

המורה הציעה: הבה נבנה מודל מתמטי למקרה! כלומר, נרשום תכונות של פונקציה f המתאימה למספר המבקרים x את מצב המחלה f(x), בהנחה שרק הביקורים משפיעים על מצבו של החולה.

$$f(0) = 1 \quad .I$$

במלים: לא באו מבקרים, המחלה נשארת בשלמותה.

$$f(1) = 1 - \frac{1}{60} = \frac{59}{60} \quad .II$$

במלים: אחרי שמבקר אחד נטל  $\frac{1}{60}$  נשאר  $\frac{59}{60}$  מהמחלה.

$$f(2) = \frac{59}{60} - \frac{59}{60} \cdot \frac{1}{60} = \frac{59}{60} \left(1 - \frac{1}{60}\right) = \frac{59}{60} \cdot \frac{59}{60} = \frac{59^2}{60^2} \quad .III$$

האמור לעיל יירשם כך:

$$f(2) = f(1) \cdot f(1)$$

במלים: אם באים שני מבקרים יחד, התוצאה היא כאילו באו אחד אחר השני.

$$f(3) = f(1) \cdot f(1) \cdot f(1) = f(2) \cdot f(1) \quad .IV$$

במלים: אם באים שלושה מבקרים יחד, כאילו באו אחד אחר השני, או שניים יחד ואחר כך השלישי.

V. מניחים (מקווים) שהחולה הולך ומבריא, כלומר המחלה הולכת ודועכת. לכן  $f$  צריכה להיות פונקציה מונוטונית יורדת.

$$\text{עבור } x_1 > x_2 \text{ קיים } f(x_1) < f(x_2)$$

במלים: ככל שמספר המבקרים גדל, המחלה נחלשת.

VI. מאחר וכל מבקר נוטל רק  $\frac{1}{60}$  ממצבו של החולה באותו רגע - המחלה תלך ותחלש אך לא תעלם לגמרי כתוצאה מהביקורים.

$$f(x) > 0 \quad \text{לכל } x$$

במלים:  $f(x)$  שואפת לאפס אך תמיד ערכיה חיוביים.

VII. הכללה לתכונות III ו IV:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

זוהי משוואה פונקציונלית שהפונקציה  $f$  צריכה לקיים.

נשאלת השאלה: איזה פונקציה מקיימת תכונה זו?

התלמידים בדקו תחילה את הפונקציות המוכרות להם: לינאריות וריבועיות.

הם בדקו את הפונקציות:  $f(x) = 5x$ ,  $f(x) = 2x + 3$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$   
כל הפונקציות הללו אינן מקיימות את המשוואה לעיל.

לאחר זמן הציעו לבדוק את  $10^n$  ומיד ראו שהפונקציה הקשורה לסיפור היא  $f(x) = \left(\frac{59}{60}\right)^x$ .

כאשר כבר היתה הפונקציה בידי התלמידים, רצו לברר מהו תחומה.

בדוגמאות לעיל התחום נקבע על ידי מקפר מבקרים שהוא מספר שלם אי שלילי.

התלמידים הציעו להרחיב את התחום למספרים שלמיים שליליים באופן הבא:

אם בהתחלת הסיפור  $f(0) = 1$  ואדם אחד ביקר לפני כן אז מצב המחלה היה  $\frac{60}{59}$ .

$$\frac{60}{59} - \frac{60}{59} \cdot \frac{1}{60} = \frac{59}{59} = 1 \quad \text{הסבר}$$

$$\left(\frac{59}{60}\right)^{-1} = \frac{60}{59} \quad \text{ואמנם}$$

מכאן אפשר להתקדם ולהגיש את מערכת E באופן אכסיומטי. התלמידים קיבלו את התחושה ונהנו, וכל הנושא נלמד בהבנה וברצון.