אבראקדאברא

מאת: אהרון פינקר, אוניברסיטת חיפה

אבראקדאברא היא מילת השבעה קדומה שנמצאה יעילה להסרת הקדחת, להרפיית כאב שיניים, ולריפוי פצעים. נהגו לרשום מילת קסם זו על גבי קמיע גם בצורת "משולש אותיות".

א
א ב
א ב ר
א ב ר א
א ב ר א ק
א ב ר א ק ד
א ב ר א ק ד א
א ב ר א ק ד א ב
א ב ר א ק ד א ב ר
א ב ר א ק ד א ב ר א

על המשמעויות המיסטיות הטמונות ב "אבראקדאברא" אפשר לקרוא באנציקלופדיה העברית, כרך א', עמוד 272.

הבעיה המענינת אותנו היא:

א) בכמה אופנים שונים אפשר לאיית את המילה אבראקדאברא, אם מתחילים באלכסון הקיצוני (מימין) של ה א-ים, מתקדמים מכל אות א (של האלכסון) לאות הסמוכה בכיוון מאונך או מאוזן וממנה ממשיכים באותו אופן עד להשלמת המילה.

הניסיון מורה כי כאשר מציגים שאלה כזו בפני תלמידי כיתה ז', הם מנסים בשלב ראשון לספור לאלתר את מספר האפשרויות. בשלבי המנייה הראשונים, התלמידים מתעודדים מהעובדה שקל יחסית למנות את האפשרויות אם מתחילים בא-ים הקרובים לקודקודי המשולש. ברם, כאשר הם בוחרים ב א-ים המרוחקים מהקודקודים, המנייה מסתבכת ואי-הוודאות במהימנות התוצאה גדלה. הילדים מגלים כי הגישה הפשטנית של ספירה ישירה אינה טובה ויש למצוא דרך יעילה יותר.

מורה המאפשר לתלמידיו להרהר בבעיה ולערוך נסיונות, עשוי לגלות שתי גישות בסיסיות לפיתרון. יהיו תלמידים שיגשו לפתרון הבעיה בהתאם לפסיכולוגית הלמידה של ה Connectionist School. הלך מחשבתם הוא בערך זה: "קשה למנות את כל אפשרויות האיות של אבראקדאברא משום שמשולש האותיות מכיל מספר רב של שורות (עמודים). רצוי לכן, לפרק מערכת מסובכת זו, לסדרת מערכות פשוטות יותר; כלומר, לסדרת משולשים דומים, בעלי מספרים עוקבים של שורות (עמודים). כאשר מספר השורות (עמודים) הוא קטן קל למנות את האפשרויות וכך אפשר להסיק מהפרטים לגבי הבעיה הכוללת".

תבנית פתרונם תהיה זו:

א	א	א	א
א ב	א ב	א ב	א ב
	א ב ר	א ב ר	א ב ר
		א ב ר א	א ב ר א
			א ב ר א ק
2	4	8	?

לאחר מספר נסיונות, התלמידים מגלים באופן אינטואיטיבי שהחוקיות היא: מספר האפשרויות גדל פי שתיים כאשר עוברים ממשולש אחד למשולש עוקב. התשובה לשאלה שלנו היא לכן 2^9, או 512. עתה קל להכליל את הפתרון. אם למשולש אותיות צלע המורכבת מ n אותיות, מספר אפשרויות האיות בצורה המתוארת בשאלה (א), הוא 2^{n-1}.

בין הפותרים עשויים גם להיות תלמידים אשר גישתם לפתרון בעיה (א) היא בהתאם לפסיכולוגית הלמידה של ה Gestalt School. אלה יתבוננו במשולש כולו, וינסו למצוא את הקשר בינו לבין פרט מסוים בבעיה. יתכן, וכתוצאה מהתבוננות זו יגלו את ההברקה הבאה: בכל איות, המתחיל באלכסון הקיצוני של ה א-ים, יש לעבור מאלכסון ה א-ים לאלכסון ה ב-ים הסמוך. כמעט מכל א אפשר לעבור לשני ב-ים. המקרים היוצאים מן הכלל הם ה א-ים שבקודקודי המשולש, מכל א כזה אפשר לעבור רק ל ב אחד. השינוי שיש לערוך ב Gestalt הוא לכן פשוט. יש להתבונן בשני ה א-ים הנמצאים בקודקוד כאילו היו א רגיל אחד. עכשיו ברורה החוקיות 2^{n-1} שהתגלתה בדרך הקודמת. מובנה הכפלה, ויש טעם ל n-1.

איזו משתי שיטות הפיתרון עדיפה? השוואת שתי השיטות תגלה כי זו הבנויה על תיאוריית ה Gestalt יותר מעמיקה ומשכנעת. בדרך כלל, תלמידים הנוקטים בשיטת פתרון זה הם בעלי סיכוי רב יותר להיות פותרי בעיות מעולים. יש גם לציין, שאף אחת משתי שיטות הפיתרון אינה לפי תיאוריית למידה פסיכולוגית אחת בלבד. בכל פיתרון אפשר לגלות עירבוב שיטות, כשאחת דומיננטית. טוב יעשה המורה אם יביא לפני תלמידיו את שתי השיטות ויסביר את ההבדלים שביניהן. אין תרגילים רבים הנוחים לטיפול מקביל כזה. נדמה לי כי הבעיות הנידונות במאמר זה יוכלו לשמש למטרה זאת ביעילות רבה.

עתה נוכל לשאול שאלה נוספת:

ב) בחר ב א מסוים באלכסון ה א הקיצוני.

בכמה אופנים אפשר לאיית את המילה אבראקדאברא לאחר בחירה זו, אם מותר להתקדם בצעדים מאונכים או מאוזנים.

תלמידים אשר קודם פתרו את השאלה (א) בהתאם לתיאוריית הלמידה של ה Connectionists ינצלו את פתרונם ויערכו (אולי) את תבנית הפתרון הבאה:

א$^{(1)}$
א$^{(3)}$ ב
א$^{(3)}$ ב ר
א$^{(1)}$ ב ר א

א$^{(1)}$
א$^{(2)}$ ב
א$^{(1)}$ ב ר

א$^{(1)}$
א$^{(1)}$ ב

מה הלאה?

המורה יוכל עתה לעזור ולהדריך אותם בעריכת המספרים בצורת משולש המספרים

1 1

1 2 1

1 3 3 1

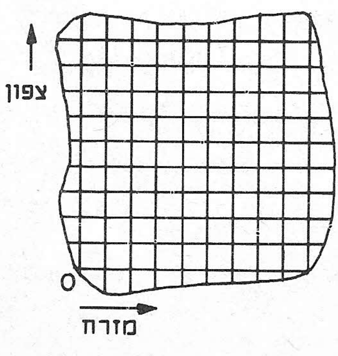
ולנסות לגלות את החוקיות. כל השערה יוצרת מוטיבציה חזקה מאד, הן לעריכה בדיקה והן למציאת הפיתרון. מעניין, שהחוקיות היא זאת של משולש המספרים של פסקל (Pascal), החשוב בשטחים רבים במתמטיקה. התלמידים אשר ינסו להבין את ה Gestalt של הבעיה, עשויים לגלות ברגע של הברקת פתע כי התשובה קשורה במספר הפעמים שאנו חייבים לבצע צעד למטה כדי להגיע מהאות א שבאלכסון הקיצוני ל א שבקודקוד מול אלכסון זה. לכן בעיתם היא זו: "בכמה אופנים שונים אפשר לבצע n צעדים, כאשר k צעדים הם למטה והשאר שמאלה?"

שוב רואים אנו שהבעיה האקויוולנטית המתקבלת מתאורית ה Gestalt היא מעמיקה יותר בהפשטתה.

אחת ממטרות ההוראה הטובה היא להורות כך שיארע טרנספר בלמידה (Transfer of learning). כלומר, התלמיד יוכל להעביר ניסיון קודם למצבים חדשים בשלב זה נוכל לבחון באופן לא טריוויאלי אם אמנם למדו התלמידים ללמוד.

נציג לפניהם את השאלה הבאה:

ג) הריבועים הלבנים שבציור הם רובעים בעיירה אבראקדאברא וקווי השתי והערב הם מערכת הכבישים של העיירה. בנקודת הזינוק 0 נמצאים 2^9 רצים. בהישמע אות הזינוק יוצאים מחצית מספר הרצים לכיוון צפון והמחצית השניה לכיוון מזרח. כל הרצים נעים במהירות קבועה המשותפת לכולם, כך שכעבור דקה כל קבוצה מגיעה להצטלבות חדשה. בכל הצטלבות חלה התפלגות דומה. השאלה היא: "היכן יהיו הרצים כעבור 9 דקות, וכמה רצים יהיו בכל מקום?"



אם התלמידים רואים את ההבדל והדמיון שבין השאלות (ב) ו (ג) והם יכולים לומר כמעט מיד כי הרצים יהיו בהצטלבויות שלאורך אלכסון הריבוע שבציור, ואולי לומר כי ההתפלגות היא:

1 , 9 , 36 , 84 , 126 , 126 , 84 , 36 , 9 , 1

אזי הם התנסו בטרנספר למידה.

בעיה אחרת שבעזרתה אפשר לבחון סגולה זו היא:

(ד) "זורקים מטבע תשע פעמים. כמה פעמים נוכל לקבל צד מסוים של המטבע?"

הטיפול בבעיות מגוונות אלה צריך בסופו של דבר ליצור אצל התלמיד הפשטה כלשהי של הבעיה והשיטה ולתת לו הצצה אל מהות המתמטיקה.

המחבר ניסה את החומר הכלול במאמר זה בכיתה ו' של בית-הספר היהודי בואשינגטון, ארה"ב. הילדים היו ברמת אינטליגנציה גבוהה מן הממוצע והמוטיבציה הטבעית היתה גבוהה. השיעור נלמד בשיטת התגלית המודרכת (Guided Discovery) והיה ער מאד. בשיעור עצמו, נתן אחד התלמידים, כמעט באופן מידי תשובה לשאלה (ג), ולאחר מכן כולם תפסו את ה Gestalt ואת השינוי שיש לערוך בו כדי להופכו לאנאלוג של הבעיה הפתורה.

התברר כי הילדים נהנו מאד מהחזרה על הבעיות כאשר במקום אבראקדאברא הם משתמשים בשמות המשפחה שלהם. פעילויות אפשריות אחרות יכולות, למשל, להתרכז סביב הבעיות הבאות:

1. בכמה אופנים שונים אפשר לאיית את המילה אבראקדאברא אם מתחילים באלכסון ה א-ים הקיצוני ימני ויכולים לנוע בכל פעם צעד אחד בצורה אנכית או מאוזנת, כאשר שני צעדים עוקבים אינם באותו כיוון?
2. בכמה אופנים שונים אפשר לאיית את המילה אבראקדאברא אם מתחילים באלכסון הא-ים הקיצוני ימני ויכולים לנוע בכל פעם רק צעד אחד בצורה אנכית או שני צעדים במאוזן?
3. נסח שאלה, מאותו הסוג כמו שאלות (1) ו (2), ופתור אותה!
4. בנה פירמידת אותיות אבראקדאברא. נסח לגביה שאלות דומות לאלו שנוסחו במאמר זה ופתור אותן!

אינני יודע אם יש לאבראקדאברא אותן תכונות הריפוי שיחסו הקדמונים למילה זו, אך נדמה לי, כי לבעיות שתוארו לעיל יש פוטנציאל חינוכי מתמטי רב והמורה המוכשר יוכל לנצלו לשיעור מעניין ולפעילויות מגוונות.