# תורת ההסתברות על הלוח הגאומטרי

מאת: ג'ון נימן (J. Niman) ורוברט פוסטמן (R. Postman)

תרגום: אבי דכטר

אפשר להשתמש בלוח הגיאומטרי (לוח מסמרים) לא רק לחקירת התכונות של צורות דו-מימדיות, אלא גם ללימוד תורת ההסתברות. להסתברות ולסטטיסטיקה תפקיד נכבד בהסברת תופעות פיזיקליות והן הופכות לחלק בלתי נפרד של תוכנית הלימודים של בית הספר היסודי. מודלים הסתברותיים מתארים מצבים בהם קיימת תכונה משותפת של אי-ודאות. לעולם אין אפשרות לקבוע בודאות אם מאורע מסויים יקרה אם לאו; במקום זאת ניתנת הערכה מספרית של ההסתברות או התדירות היחסית של מופע המאורע.

מרחב המדגם S של ניסוי פיזיקלי או מחשבתי (היפותטי) הוא קבוצת כל התוצאות האפשריות שלו. מאורע E הוא קבוצה חלקית של מרחב המדגם. נאמר שהמאורע E קורה אם תוצאת הניסוי היא איבר של E. תורת ההסתברות נבחנת על הלוח הגיאומטרי, כאשר S הוא הלוח כולו ו- E הוא תחום מסוים של הלוח אשר גבולותיו מסומנים על ידי גומיות. ההסתברות של מאורע E נקבעת על ידי מציאת היחס בין השטח של E לשטח של S. תהליך כזה, מצמצם בעיות הסתברות לבעיות של שטח והוא יעיל ביותר בפיתוח אינדוקטיבי של מושגים הסתברותיים.

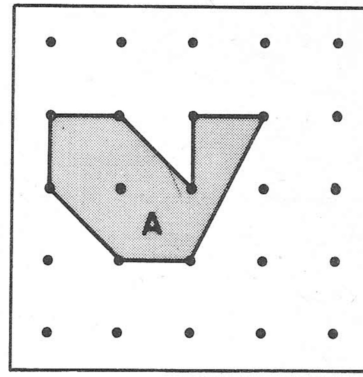
התלמיד מתחיל את הלימוד על ידי בנית תחומים על הלוח הגיאומטרי. הוא מוצא את השטחים של התחומים ואז עליו לחשב את היחסים בין השטחים הללו לבין השטח הכולל של הלוח הגיאומטרי. (בציורים 1-10 השטח הכולל של הלוח הגיאומטרי הוא 16 יחידות ריבועיות). פעילות זו משמשת לתלמיד כהכנה לקראת לימוד ההסתברות בעזרת הלוח הגיאומטרי.

בחומר שלהלן מודגמות דרכים בהן אפשר להשתמש בלוח הגיאומטרי לפיתוח מושגים הסתברותיים. בכל מקרה מובאת דוגמה מייצגת אחת או שתיים (מספר גדול בהרבה מזה נדרש בעת הלימוד בכיתה).

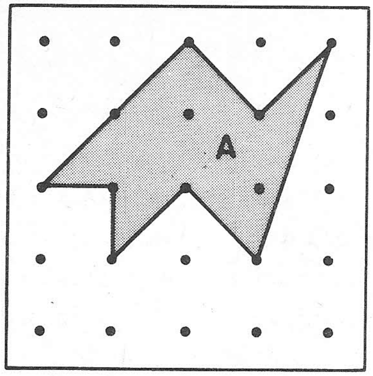
הבה ונחשוב על צנחן המרחף באויר ועומד לנחות באורח אקראי על שדה המיוצג על ידי הלוח הגיאומטרי. קבוצת הבעיות הראשונה עוסקת בהסתברות שהצנחן ינחת בתוך תחום נתון וכן גם בהסתברות שהצנחן ינחת מחוץ לתחום זה.

---

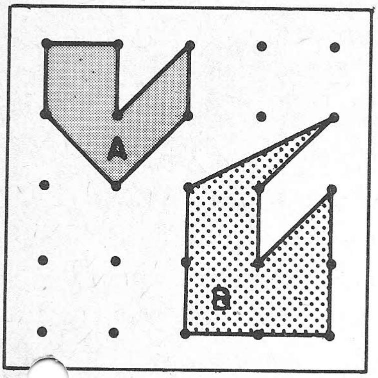
בציור 1, שטח התחום הוא 4. לכן, ההסתברות שהצנחן ינחת בשטח זה היא שטח זה המחולק בשטח הכולל של הלוח כלומר 4/16 או 1/4. ההסתברות שהוא ינחת מחוץ לתחום היא 12 מחולק בשטח הכולל של הלוח הגיאומטרי, 12/16, או 3/4. באופן דומה, עבור התחום בציור 2, ההסתברות לנחיתה בתוך התחום הכהה היא 11/32 וההסתברות לנחיתה מחוץ לו היא 21/32.




ציור 1



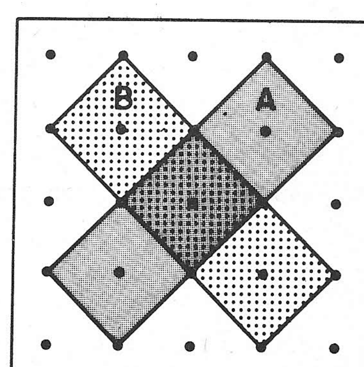

ציור 2



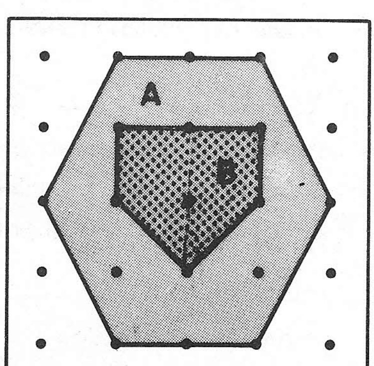

ציור 3

בעיות מסוג זה בנוסף לנסיון המעשי אשר הן מספקות מוליכות לקראת ההכללה שאם ההסתברות של E שווה ל p הרי ההסתברות של המשלים של E (כל שאיננו E נסמנו ב E') שווה ל 1-p.

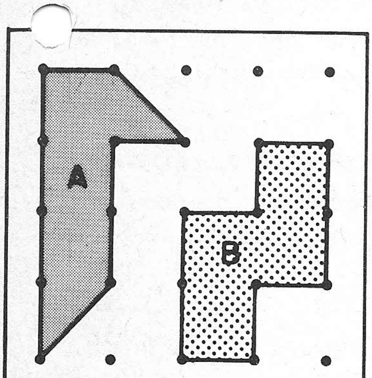
עתה נניח שיש על הלוח הגיאומטרי שני תחומים (או יותר) ושהצנחן חייב לנחות בשניהם (או בכולם, אם יש יותר משניים). נחשב את ההסתברות שהוא ינחת בתחומים A ו B גם יחד על ידי מציאת התחום המשותף ל A ול B וחישוב היחס בין שטחו של התחום המשותף לבין שטחו של הלוח הגיאומטרי. נסמן את ההסתברות שהצנחן ינחת בתחומים A ו B ביחד, ב $P(A \cap B)$ אם התחומים מסודרים כמו בציור 3, השטח של התחום המשותף הוא 0 וההסתברות של האירוע היא 0/16, או 0. דוגמאות דומות יוליכו למסקנה שאם A ו B הם זרים, הרי $P(A \cap B) = 0$. המצב שונה בציור 4. השטח של $A \cap B$ שווה ל 2 ולכן $P(A \cap B) = 2/16 = 1/8$. בציור 5, B הוא תת-קבוצה של A, השטח של $A \cap B$ שווה ל 3 ולכן $P(A \cap B) = 3/16$. במהרה יגיע התלמיד למסקנה שאם B מוכל ב A הרי $P(A \cap B) = P(B)$.



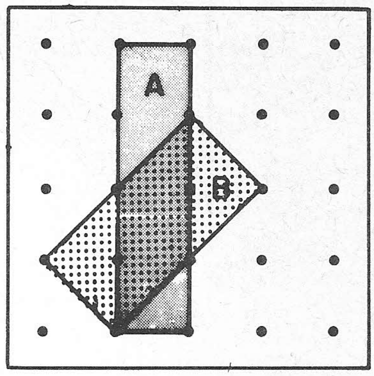

ציור 4



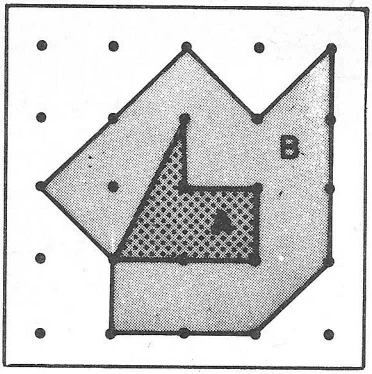

ציור 5



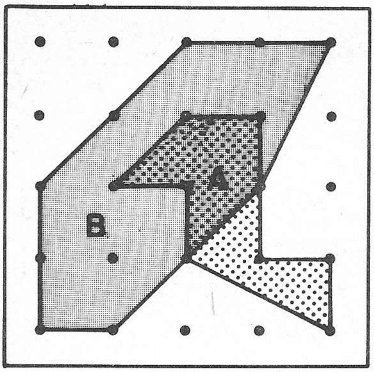

ציור 6



ציור 7



ציור 8



ציור 9

עתה נדון בהסתברות שהצנחן ינחת בתוך תחום אחד <u>או</u> בתוך השני, $P(A \cup B)$. בציור 6 ההסתברות של נחיתה בתחום אחד <u>או</u> בשני תהיה ההסתברות של A ועוד ההסתברות של B, או $1/2 = 1/4 + 1/4$. סוג בעיות זה מגלה שכאשר מאורעות הם זרים (כלומר, אין להם אלמנטים משותפים), הרי $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. בציור 7 לעומת זאת, A ו B אינם זרים. השטח של שני תחומים אלו הוא 6; לכן $P(A \cup B) = 6/16 = 3/8$.
בציור 7 $P(A \cup B)$ שווה להסתברות של A ועוד ההסתברות של B, פחות ההסתברות של החיתוך של A ו B. בסמלים ירשם הדבר כך: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ וזו הנוסחה למציאת הסתברות האיחוד של שני מאורעות.

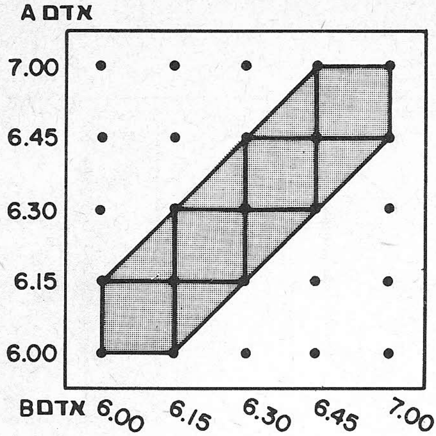
נניח עתה כי בעת הצניחה כאשר יורד הצנחן לעבר הלוח מתברר לו כי הוא עומד לנחות בתחום B כמתואר בציורים 8 ו 9. בהיות אינפורמציה זו נתונה, מה ההסתברות שהוא ינחת בתוך התחום A?

בכדי לפתור זאת עלינו להגביל את מרחב המדגם שלנו לתחום B ואז לחשב את היחס בין השטח של A לשטח של B . בציור 8, השטח של B הוא 11 יחידות ריבועיות והשטח של A הוא 2 יחידות ריבועיות . מכאן ההסתברות שהצנחן ינחת ב A , כאשר ידוע לו כי הוא ינחת ב B , היא 2/11. בציור 9 השטח של B הוא 9, והשטח של אותו חלק של A הכלול ב B הוא 2. (אם הצנחן עומד לנחות ב B איננו מתעניינים באותו חלק של A הנמצא מחוץ ל B). ההסתברות שהוא ינחת ב A אם הוא יודע שינחת ב B היא 2/9.
דוגמאות כאלו של הסתברות מותנית, מוליכות להכללה כי ההסתברות של A כאשר B נתון היא הסתברות של החיתוך של A ו B מחולקת בהסתברות של B. בסמלים המקובלים:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

דוגמאות פשוטות אלה מראות כיצד ניתן להשתמש בלוח הגיאומטרי לפיתוח מושגים מתורת ההסתברות וליצירת המשפטים הבאים באופן אנדוקטיבי:

1. אם $P(A) = p$ אזי $P(A') = 1 - p$
2. אם A ו B זרים, אזי $P(A \cap B) = 0$




3. אם A מוכל ב B אזי $P(A \cap B) = P(A)$

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5. $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

שימוש נוסף של הלוח הגיאומטרי מודגם בעזרת בעיה מענינת. שני אנשים קובעים פגישה במקום מסוים בגן הציבורי בין השעות 6 ו- 7 אחה"צ בתאריך נתון. כל אחד מסכים לחכות בדיוק 15 דקות מרגע הופעתו וללכת, אם השני טרם הגיע. מה היא ההסתברות שהשניים אכן יפגשו?

אפשר להציג את הפיתרון על הלוח הגיאומטרי כמתואר בציור 10. ניתוח הבעיה הוא כדלקמן:
אם אדם B מופיע בשעה 6.15 שני האנשים עדיין יפגשו אם A יופיע עד ל 15 דקות מוקדם יותר (6.00), או מאוחר יותר (6.30). על הלוח הגיאומטרי זהו הקו האנכי הראשון שארכו שתי יחידות. באופן דומה אם A מופיע ב 6.15 הם יפגשו כל עוד B יופיע 15 דקות מוקדם יותר (6.00) או מאוחר יותר (6.30), ועל הלוח הגיאומטרי זהו הקו האופקי הראשון שארכו שתי יחידות. אם B מגיע ב 6.00 יכול A להופיע לכל המאוחר ב 6.15. על הלוח הגיאומטרי זהו קו אנכי באורך יחידה אחת מעל 6.00. אם A מופיע ב 6.00, רשאי B להגיע לכל המאוחר ב 6.15. עובדה זו מוצגת על הלוח הגיאומטרי כקו אופקי באורך יחידה אחת, ימינה מ- 6.00. השטח המתאים לפגישה הוא איפוא החלק הכהה בציור 10. שטח זה שווה ל 7 יחידות, לכן ההסתברות ש A ו B יפגשו שווה ל 7/16.

(בדוגמאות שלעיל ניתן היה לחשב את השטחים של התחומים השונים על ידי ספירת ריבועים וחצאי ריבועים. ישנה נוסחה המאפשרת לחשב את השטח של כל תחום פשוט וסגור על הלוח הגיאומטרי בעזרת מספר המסמרים הנמצאים בהיקף (T) ומספר המסמרים אשר בתוך התחום (I): $I + \frac{T-2}{2} =$ שטח*).

---

* הערת המערכת: זהו חוק פיק, עיין תיק מספר 6.