כיצד יוצרים בעיות

מאת: שמואל אביטל ושלמה ליבסקינד, המחלקה להכשרת מורים, הטכניון, חיפה

בבחינת המיון של הטכניון, משנת תשכ"ג, הופיעה הבעיה:

1. הוכח כי לכל n טבעי קיים:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$$

בבחינת הבגרות משנת תשכ"ו הופיעה הבעיה:

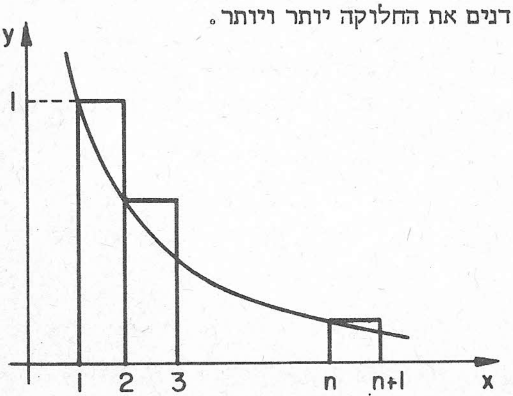
2. הוכח באמצעות אינדוקציה מתמטית כי הסכום $1+3^{x}+9^{x}$ מתחלק ב 13 בשביל כל x השווה לאחד מאיברי הסדרה $(3n-2)$, ..., 7, 4, 1.

שתי הבעיות כשלעצמן אין בהן ענין מיוחד. ההוכחה של כל אחת מהן בעזרת משפט האינדוקציה המתמטית היא שגרתית למדי. אולם המתבונן בכל אחת מהן ישאל את עצמו, ובצדק, כיצד נוצרת בעיה כזאת. מה היה הגירוי המקורי שהעלה אותה במוחו של מכין הבעיה? בעלי לשון הרע יאמרו אולי: הוא מצא אותה בספר רוסי ישן, אבל השאלה במקומה עומדת; כיצד עלתה בעיה זאת בדעתו של המתמטיקאי שיצר אותה לראשונה?

כאשר שאלנו את עצמנו שאלה זאת חיפשנו נקודת אחיזה. כלומר, בדקנו את האסוציאציות שהביטויים המתמטיים המופיעים בשאלות מעוררים במוחנו. ברור, שבמקרה זה הידע הקודם של השואל קובע את התשובה. אסוציאציות ממין זה אינן נוצרות בחלל ריק, אלא הן תלויות בהיסטוריה הקודמת של החושב, ולפיכך השאלה מקבלת צורה כאילו סוביקטיבית:
היכן נתקלים אנחנו בביטויים מסוג זה? כאן עלתה בדעתנו תשובה, אשר לא רק שהיא עונה לשאלות ששאלנו, אלא שהיא יכולה לשמש מקור לא אכזב ליצירת בעיות נוספות לשימוש בכיתה.
נטפל בנפרד בשתי השאלות ששמשו לנו נקודת מוצא.

היכן, פרט לפרק על סדרות, נתקלים אנו בשימוש בסכום של איברי סדרה?
ברור שזה קורה ביחידה על ההגדרה והשימוש של האינטגראל המסויים של פונקציה, כי הרי ניתן לראות את האינטגראל המסויים כגבול של סכומי מלבנים, כאשר מעדנים את החלוקה יותר ויותר.

מסתבר שאת הסכום $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ אפשר לקבל מהתבוננות בגרף הפונקציה $f: x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x>0$. נתבונן בגרף ובשטחי המלבנים אשר אורך בסיסם יחידה אחת והם בנויים על האורדינטות $f(1)=\frac{1}{\sqrt{1}}$, $f(2)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ וכו' (ראה ציור 1).



ציור 1

הפונקציה מונוטונית יורדת בכל תחום ההגדרה שלה, ולפיכך הסכום הנ"ל גדול מהשטח שמתחת לעקום בין $x = 1$ ו- $x = n + 1$.

כלומר:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big]_{1}^{n+1} = 2(\sqrt{n+1}-1)$$

וזה בדיוק הנדרש בבעיה הנ"ל.

ברור עתה כי דרך זו יכולה להיות מקור למספר רב של בעיות שהתלמיד יוכל להוכיחן בעזרת אינדוקציה מתמטית. אם נסתכל למשל בפונקציה $g : x \to \frac{1}{x^{1/3}}$ נקבל

$$1 + \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} + \ldots + \frac{1}{n^{1/3}} > \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x^{1/3}} = \frac{3}{2}x^{2/3}\Big]_{1}^{n+1} = \frac{3}{2}[(n+1)^{2/3}-1]$$

כלומר מתקבלת הבעיה: הוכח כי לכל n טבעי קיים:

$$\frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} + \ldots + \frac{1}{n^{1/3}} > \frac{3}{2}[(n+1)^{2/3}-1]$$

נוכל גם להכליל בעיה זו:

לכל $-1 < \alpha < 0$ הפונקציה $f : x \longrightarrow x^{\alpha}$ היא מונוטונית יורדת.

לכן נקבל על-פי השיטה הנ"ל

$$\int_{0}^{n} x^{\alpha}dx > \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} > \int_{1}^{n+1} x^{\alpha}dx$$

ומכאן אפשר מייד לקבל שתי בעיות:

א) לבדוק האם ייתכן כי: $1 + 2^{\alpha} + 3^{\alpha} + \ldots + n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

ב) לבדוק האם ייתכן כי: $1 + 2^{\alpha} + 3^{\alpha} + \ldots + n^{\alpha} > \frac{1}{\alpha+1}[(n+1)^{\alpha+1}-1]$

מה קורה כאשר $\alpha > 0$ או $\alpha \leq -1$?

נציין במפורש כי המורה חייב לבדוק האומנם יש לתלמיד, שאינו יודע חשבון אינטגרלי, המכשירים הדרושים כדי לפתור את הבעיה.

ניגש עתה להשערות בקשר למקור הבעיה השנייה אותה הזכרנו בראשית דברינו:

יש להוכיח כי הסכום: $1 + 3^x + 9^x$ מתחלק ב 13 בשביל כל x השווה לאחד מאיברי הסדרה $1, 4, 7, \ldots, (3n-2)$.

תחילה נפשט את הבעיה.

ברור שהמספרים $1, 4, 7, \ldots$ ניתנים להצגה גם כ- $3n+1$ עבור $n = 0, 1, 2, \ldots$ כלומר עלינו להוכיח כי: $1 + 3^{3n+1} + 9^{3n+1} = 1 + 3\times3^{3n} + 9\times9^{3n}$ מתחלק ב 13 לכל n שלם לא שלילי.

הבעיה עוסקת בהתחלקות מספרים, כלומר האסוציאציות הראשונות קשורות לנושאים מתורת המספרים האלמנטרית. כאן ידע אלמנטרי ביותר במשפטי קונגרואנציה מאפשר הרכבת בעיות כאלה לאין ספור.

ננסח כאן את הדברים ללא שימוש במושג הקונגרואנציה.

מקור הבעיה הוא בטענות הבאות:

א) אם a נותן שארית R כאשר מחלקים אותו ב b, אזי המכפלות ka ו kR נותנים <u>אותה</u> שארית בחילוק ב b, כאשר $k > 0$ מספר שלם.

ב) אם a נותן שארית R_1 כאשר מחלקים אותו ב b, ו c נותן שארית R_2 כאשר מחלקים אותו ב b, אז סכום השארית $R_1 + R_2$ (מכפלת השאריות $R_1 \cdot R_2$) נותן אותה שארית בחילוק ב b כמו סכום המספרים $a + c$ (מכפלת המספרים $a \cdot c$)

כתוצאה משתי טענות אלה נקבל:

גם 3^3 וגם 9^3 נותנים שארית 1 בחילוק ב 13, לכן גם 3^{3n} וגם 9^{3n} ייתנו שארית 1 בחילוק ב 13

לכן 3×3^{3n} ייתן שארית 3 בחילוק ב 13

9×9^{3n} ייתן שארית 9 בחילוק ב 13

ומכאן שהסכום $1 + 3^{3n+1} + 9^{3n+1}$ יתחלק ב 13

על-ידי שימוש במשפט הקטן של פרמה (Fermat), יש לנו כמעט אלגוריתם ליצירת בעיות כאלה.

ממשפט פרמה משתמע שלכל p ראשוני ולכל a שלם זר ל p, קיים ש a^{p-1} נותן שארית 1 בחילוק ב p. (אפשר כמובן להשתמש גם במשפט הכללי יותר של אוילר Euler). נבחר מספר ראשוני כלשהו, למשל 5, ומספר כלשהו זר לו למשל 3. על סמך המשפט הנ"ל, 3^4 ייתן שארית 1 בחילוק ב 5. מכאן ש 3^{4n} ייתן גם הוא שארית 1 בחילוק ב 5. נכפול מספר זה ב 7 ונוסיף 3, ונקבל בתוצאה: $7 \cdot 3^{4n} + 3$ המתחלק ב- 5.

והנה לפנינו בעיה: הוכח בעזרת אינדוקציה מתימטית, או בכל דרך אחרת, כי: $3 + 7 \cdot 3^{4n}$ מתחלק ב 5 לכל n שלם לא שלילי.

(הנוסח "בדרך אחרת" היה נוסח מקובל בבחינות הבגרות).

התלמיד הרגיל שלא הכיר את היסודות האלמנטריים ביותר של תורת המספרים יצטרך להוכיח את הטענה בעזרת אינדוקציה מתימטית, אך רצוי להביא לידיעת תלמידינו את הגישה המתקבלת מן הטענות א ו-ב שפרטנו לעיל.

נוכחנו כי מנקודת ראות חינוכית בשעת דיון בבעיה מתימטית כדאי לשאול לא רק:
"כיצד פותרין בעיה זאת"? אלא גם "כיצד נוצרה בעיה זאת"?

לאמיתו של דבר מכל טענה מתימטית אפשר לקבל על-ידי הכללה, פירוט, או שינוי קטן, מערכות של בעיות ושאלות שישמשו אותנו אם לתרגיל רגיל ואם להרחבת אופקו של התלמיד.

במאמר אחר נביא דוגמאות לכך מתחומים יותר אלמנטריים מאלה שנגענו בהם במאמר זה.