ניסוי בהוראת גיאומטריה בעזרת טרנספורמציות

מאת: נורית זהבי

בשנת הלימודים תשל"ג נערך באחד מבתי הספר בכתות ט' ניסוי בהוראת גיאומטריה דרך טרנספורמציות. תוך כדי פיתוח הרעיונות הקשורים בטרנספורמציות למדו התלמידים גיאומטריה אוקלידית בגישה דדוקטיבית, העמיקו את הבנתם בנושא הפונקציות באלגברה ורכשו ידע מתמטי כללי בנוסף לידע הגיאומטרי.

במאמר זה נספר על הרקע לניסוי, מטרותיו ומעט ממסקנותיו. על מנת להדגים את היתרונות בגישה זו נציג פה סדרת משפטים והוכחות לדוגמא מתוך חומר הניסוי.

במאה האחרונה נשמעו ביקורות על הוראת הגיאומטריה האוקלידית הסינתטית ומורי המתמטיקה מתלבטים ומחפשים דרך מתאימה להוראת הגיאומטריה. אנשי החינוך המתמטי העלו אפשרויות שונות של הוראת גיאומטריה, אחת הגישות היא הוראת גיאומטריה בעזרת טרנספורמציות.

הוראת טרנספורמציות גיאומטריות יוצרת קשר לנושאים אחרים במתמטיקה, בראש וראשונה למושג הפונקציה. הפונקציה היא מושג מרכזי בהוראת המתמטיקה בבית הספר התיכון והגיאומטריה מאפשרת הצגת דוגמאות טבעיות של פונקציות שאינן פונקציות מספריות.
טרנספורמציה גיאומטרית היא העתקה חד-חד ערכית של קבוצה גיאומטרית על עצמה. לכל תהליך של טרנספורמציה קשור מושג בסיסי במתמטיקה והוא ה"שמורה" - תכונה או מושג הנשמר על ידי הטרנספורמציה. הוראת גיאומטריה דרך טרנספורמציות מאפשרת להכיר ולהבין את מושג השמורה, כי לימוד הגאומטריה נעשה על ידי לימוד התכונות הנשמרות על ידי טרנספורמציות שונות.

בשנים האחרונות החלו ללמד בארצות שונות גיאומטריה בעזרת טרנספורמציות. נערכו ניסויים ונכתבו ספרי לימוד בנושא. גם בארץ הועלתה על ידי פרופ' ש.א. עמיצור הצעה ללמד גיאומטריה בגישה זו. ההצעה הועלתה וגובשה בסמינריון בהנהלתו של פרופ' עמיצור שהתקיים בתשל"א ובתשל"ב באוניברסיטה העברית בירושלים. הכוונה היתה ללמד גיאומטריה אוקלידית בגישה דדוקטיבית ולנסות להשיג בנוסף לכך, לפחות בצורה חלקית, את המטרות הבאות:

א. הקנית ידע מתמטי כללי בנוסף לידע הגיאומטרי.
ב. רכישת יכולת הוכחה באופן דדוקטיבי.
ג. הבנת ענין ההכללה והטיפול במערכות מתמטיות אנלוגיות, ניסוח המשפטים המתאימים והוכחתם.
ד. הבנת יתר של האלגברה, בעיקר נושא הפונקציות.
ה. הבנת המושגים: טרנספורמציה גיאומטרית, שמורה והרכבה של טרנספורמציות.
ו. הוכחת משפטים ותרגילים בעזרת שיקולי טרנספורמציות.

הצעת תכנית לימודים חדשה מחייבת ניסוי ולצורך הניסוי נכתב על ידי כותבת מאמר זה בהדרכת פרופ' עמיצור חומר לתלמיד. החומר כלל פרקים ראשונים בהוראת גיאומטריה בעזרת טרנספורמציות. בשנת הלימודים תשל"ג למדו את החומר הזה שתי כיתות ט', רמה א' בחטיבת הביניים. מתכנני הניסוי הציבו בפניהם את המטרות הבאות:

א. בירור השאלה: האם הוראת גיאומטריה בדרך זו נתפשת על ידי התלמידים בגיל זה?

ב. מציאת הנקודות הקשות בחומר ונסיון לתקנן.

ג. בדיקת השאלה: האם התלמידים השיגו את מטרות החומר?

ד. גילוי כיוונים נוספים בחומר בעזרת התלמידים.

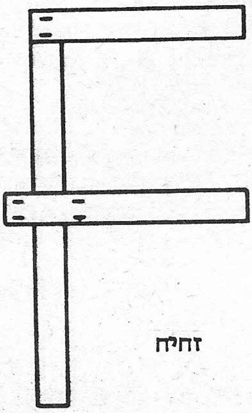
בעקבות הניסוי הוסקו מסקנות לגבי תיקונים ושינויים שיש להכניס בחומר. באופן כללי התברר, כי אכן אפשר ללמד גיאומטריה בעזרת טרנספורמציות וכי התלמידים מבינים את ההוכחות ומתעניינים בנושא. על-ידי הטיפול האנלוגי במושגים במערכות שונות (נבהיר זאת בהמשך המאמר) רכשו התלמידים כלים ובטחון לטיפול עצמי בנושא חדש. התלמידים הטובים וגם התלמידים החלשים אהבו להוכיח משפטים בעזרת שיקולי טרנספורמציות. התלמידים החלשים הסתפקו בהוכחת התרגילים והמשפטים השגרתיים והתלמידים הטובים התמודדו עם תרגילי אתגר קשים.
הניסוי שנערך בתשל"ג היה ניסוי ראשוני בלבד. כזמן מתאים להתחלת לימוד חומר זה בגיאומטריה נבחר הזמן בו מתחילים באלגברה את נושא הפונקציות. הוראת פרקי הניסוי ארכה 52 שעות אולם נראה כי אפשר לקצר את משך ההוראה.

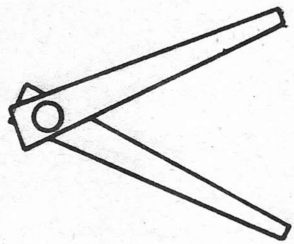
שלא כמקובל בתכניות שהוצעו ללימוד הגיאומטריה בעזרת טרנספורמציות לא נבחרה הסימטריה בתור טרנספורמציה בסיסית, אף כי היא מושג טבעי ומעניין לתלמיד. בניסוי נבחרה טרנספורמצית השיקוף בנקודה (ראה להלן) כטרנספורמציה היסודית. לימוד שמורותיה מאפשר טיפול מידי בקווים מקבילים ובמרובעים ולאחר מכן קיימת התפתחות טבעית של ההומותטיה והדמיון. כמו כן לא נבחרה מערכת מינימלית של אכסיומות ואף לא ניתן ניסוח מפורט של כל האכסיומות. מושגי החפיפה והאכסיומות הקשורות להם (של קטע, זוית ומשולש) הוכנסו מיד בהתחלה מסיבות דידקטיות אף כי בפיתוח מתמטי טהור של הנושא אין צורך באכסיומות אלו. מושגי החפיפה הובאו תחילה דווקא משום שהם קלים ונתפשים בטבעיות על ידי התלמידים, בעזרתם עוברים למושג הטרנספורמציה והמשפט הבסיסי מוכח על סמך משפט חפיפה ראשון.

קטעים אופייניים מתוך חומר הלימוד בניסוי

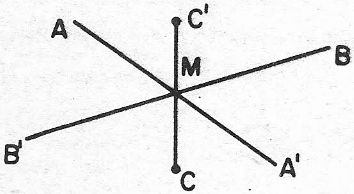
I. בפרק הראשון מופיעה מערכת המושגים בהנדסה בה ישתמשו התלמידים. שלושת הנושאים המרכזיים בפרק הם: הקטע, הזוית והמשולש. הטיפול בשלושתם אנלוגי כך שהתלמיד רואה כי את אשר עושים לגבי קטע מנסים, בצורה אנלוגית, לעשות גם לגבי זוית ומשולש. מיוחד לגישת הניסוי הוא שלא מופיעים בפרק הראשון מושגי אורך קטע ומידת זוית ובמקומם מופיעים מכשירים הממחישים את מושג החפיפה.

כמכשיר להעתקת קטעים משתמשים ב"זחיח" - סרגל בלי שנתות ועליו זרוע הניתנת להזזה. לגבי קטע מופיע מושג יסודי שהוא חפיפת קטעים.
כמכשיר להעתקת זויות משתמשים ב"זויתן" - זוג זרועות מחוברות בקצה אחד והזוית ביניהן ניתנת לשינוי. כמו לגבי קטע מופיע גם לגבי זוית מושג יסודי והוא חפיפת זויות.
כאשר עוברים לנושא המשולש מרכיבים מכשיר להעתקת משולשים מזויתון שעל זרועותיו זחיחים. משפט החפיפה הראשון מוצג כמשפט יסודי (אכסיומה) בעקבות המושגים היסודיים חפיפת קטעים וחפיפת זויות.


זחיח


זויתן

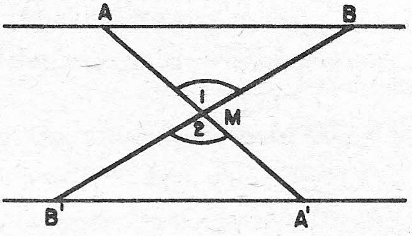
II. הגדרת הטרנספורמציה - שיקוף בנקודה.
במישור נתון בוחרים נקודה M קבועה. לכל נקודה A מעבירים את הקטע $\overline{AM}$ וממשיכים אותו לצד השני עד לנקודה A' כך ש- $\overline{AM} \cong \overline{MA'}$. A' היא תמונתה של A על ידי שיקוף בנקודת השיקוף M . מסמנים את העתקת השיקוף בנקודה M על ידי T_M
ורושמים $T_M(A) = A'$ או $T_M: A \mapsto A'$ ופירושו: השיקוף מתאים לנקודה A את הנקודה A'.



המשפט הבסיסי עוסק בשמורות של צורות גיאומטריות הקשורות לשתי נקודות, ביחוד שמירת ה"אורך".

__משפט:__ אם A' ו- B' הן תמונות השיקוף ב-M של A ו- B בהתאמה, אז:

$\overline{A'B'} \cong AB$, $\sphericalangle MA'B' \cong \sphericalangle MAB$ (וכן $\sphericalangle MBA \cong \sphericalangle MB'A'$)



נתון: $T_M : A \mapsto A'$

$T_M : B \mapsto B'$

צ"ל: $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$

$\sphericalangle MA'B' \cong \sphericalangle MAB$

הוכחה: $\left\{ \begin{array}{l} \overline{MA} \cong \overline{MA'} \\ \overline{MB} \cong \overline{MB'} \end{array} \right.$ הגדרת הטרנספורמציה

$\sphericalangle M_1 \cong \sphericalangle M_2$ זוית קודקודיות (המשפט על חפיפת זויות קודקודיות הוכח לפני כן).

$\triangle BAM \cong \triangle B'A'M$ משפט חפיפה ראשון

$\Downarrow$

$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{A'B'} \\ \sphericalangle MAB \cong \sphericalangle MA'B' \\ \sphericalangle MBA \cong \sphericalangle MB'A' \end{array} \right.$ בתור חלקים מתאימים במשולשים חופפים

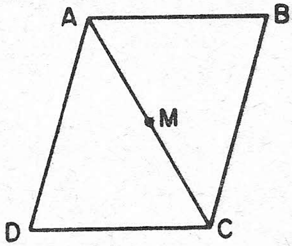
מ.ש.ל.

במשפט זה משתמשים להוכחת המשפטים בדבר תמונה של הישר וחלקיו, תמונה של זוית ותמונה של משולש. במהלך הלימוד של נושאים אלו עולה בהדרגה הענין והצורך בהוכחת משפטים על תמונותיהן של צורות שונות, וכך מכירים התלמידים את מושג השמורה.

III. אחת השמורות החשובות של השיקוף בנקודה היא: "תמונה של ישר על ידי שיקוף בנקודה הוא ישר מקביל". בדרך זו מתקבל נושא המקבילים באופן טבעי מתוך התכונות של הטרנספורמציה וזה מוביל לפרק התכונות של מרובעים.

לצורך הדגמה נביא עתה הוכחה של אחד המשפטים.

<u>משפט:</u> במקבילית, האלכסונים חוצים זה את זה.



נתון: $AB \parallel CD$

$AD \parallel BC$

צ"ל: האלכסונים חוצים זה את זה.

הוכחה: נסמן ב- M את אמצע $\overline{AC}$.

$\left.\begin{cases} BC \parallel AD \\ T_M(A) = C \end{cases}\right\} \Rightarrow T_M(AB) = CD$ (כי תמונת השיקוף ב- M של הישר AB הוא ישר דרך C מקביל ל- AB ולכן הוא CD).

$\left.\begin{cases} BC \parallel AD \\ T_M(C) = A \end{cases}\right\} \Rightarrow T_M(BC) = AD$ (כנ"ל)

$$B = AB \cap BC \Rightarrow T_M(B) = T_M(AB) \cap T_M(BC)$$

שהרי תמונת נקודת החיתוך של שני ישרים היא נקודת החיתוך של תמונת הישרים.

$$T_M(B) = CD \cap AD = D \quad \text{כלומר} \quad T_M : B \mapsto D$$

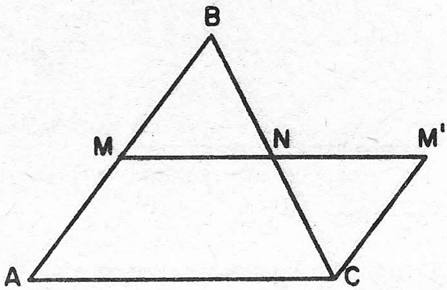
ולפי הגדרת הטרנספורמציה נמצאות B , M ו- D על ישר אחד ו- M הוא האמצע של $\overline{BD}$.
כלומר האלכסונים נחצים.

מ.ש.ל.

הערה: ממהלך הוראת משפט זה התברר כי הוכחתו דורשת הכנה על ידי מערכת תירגול מתאימה.

IV. משפט מעניין בחומר הוא המשפט על קטע אמצעים המתקבל בעזרת הרכבה של שני שיקופים בנקודות שונות. בצורה זו לומדים לא רק את התכונות הגיאומטריות של קטע האמצעים אלא גם פוגשים במושג חדש - הרכבה של טרנספורמציות.

משפט: M ו- N הן שתי נקודות שונות. A נקודה שאינה על הישר MN . נמצא את $T_M(A)$ ונסמנה B , נמצא את $T_N(B)$ ונסמנה C . אזי: $AC \parallel MN$ ו- $\overline{AC} \cong 2\cdot\overline{MN}$



נתון: $B = T_M(A)$

$C = T_N(B)$

צ"ל: $AC \parallel MN$

$\overline{AC} \cong 2\cdot\overline{MN}$

הוכחה:

(1) נבנה 'M כך ש- $T_N(M) = M'$

(2) $T_M(AM) = \overline{BA}$ מהנתון

(3) $T_N(\overline{MB}) = \overline{M'C}$ <= (1) והנתון $C = T_N(B)$

(4) $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ <= (2)

(5) $M'C \parallel MB$, $\overline{MB} \cong \overline{M'C}$ <= (3) (תמונה של קטע הוא קטע מקביל וחופף).

(6) $M'C \parallel AM$, $\overline{AM} \cong \overline{M'C}$ <= (4),(5) וטרנסיטיביות

(7) המרובע $AMM'C$ הוא מקבילית <= (6) (זוג צלעות נגדיות שוות ומקבילות).

(8) $\overline{MM'} \cong \overline{AC}$, $MM' \parallel AC$ <= (7) (צלעות נגדיות במקבילית)

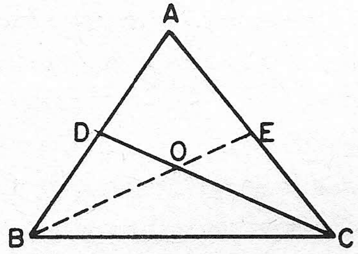
$AC \parallel MN$, $\overline{AC} \cong 2\cdot\overline{MN}$ <= (1),(8)

מ.ש.ל.

V. נושא הדמיון מתקבל בטבעיות מהכללת הטרנספורמציה למשפחת ההומותטיות. בשלב ראשון מופיעה טרנספורמציה חדשה של המישור: שיקוף מגדיל פי 2, המסומנת $T_{M,-2}$.
$T_{M,-2}$ מתאימה לכל נקודה במישור A נקודה 'A כך ש- A',A,M על קו ישר אחד ו- $\overline{MA'} \cong 2\cdot\overline{MA}$.

הטיפול בטרנספורמציה זו ושמורותיה נעשה באופן אנלוגי לטיפול בשיקוף T_M (המקבל עתה את הסימון $T_{M,-1}$) מופיעים כאן הנשאים האופייניים לטרנספורמציה זו, כמו דמיון משולשים במקום חפיפת משולשים והמשפטים על תיכונים במשולש.

<u>משפט:</u> כל שני תיכונים במשולש מחלקים זה את זה לשני קטעים שהאחד מהם, הקרוב לקודקוד גדול פי 2 ממשנהו.



נתון: $\triangle ABC$

$\overline{AD} \cong \overline{DB}$

$\overline{AE} \cong \overline{EC}$

צ"ל: B ו- C הן תמונות של E ו- D בהתאמה על ידי שיקוף פי 2 בנקודת החיתוך של התיכונים.

הוכחה: DE הוא קטע אמצעים ב- $\triangle ABC$ ולכן:

$$DE \parallel BC$$

$$\overline{BC} \cong 2\cdot\overline{DE}$$

על DC נמצא נקודה O כך ש- $C = T_{O,-2}(D)$

$$\left.\begin{array}{l} C = T_{O,-2}(D) \\ BC \parallel DE \end{array}\right\} \Rightarrow T_{O,-2}(DE) = BC$$ (כי תמונת ישר הוא ישר מקביל)

ולכן הנקודה $T_{O,-2}(E)$ היא נקודת החיתוך של הישר EO והישר BC. נקרא לה 'E. חייב להתקיים $\overline{CE'} \cong 2\cdot\overline{DE}$ ואולם $\overline{CB} \cong 2\cdot\overline{DE}$ ולכן B היא בדיוק 'E. כלומר $T_{O,-2}(E) = B$

הערה: יש לשים לב לקוים המשותפים של הוכחה זו וההוכחה על האלכסונים במקבילית שהובאה לפני כן.

VI. אחרי הטיפול בטרנספורמציה $T_{M,-2}$ ניתן לתלמידים תרגיל החקירה הבא: הגדר טרנספורמציה - שיקוף מגדיל פי 3. סמן אותה $T_{M,-3}$. נסח והוכח מערכת משפטים ותרגילים דומה לזו שהוכחנו לגבי הטרנספורמציה $T_{M,-2}$.

התלמידים הכינו עבודות נאות הן בצורתן והן בתכנן. הם ניסחו יפה את המשפטים והתרגילים והוכיחו הוכחות מענינות. לתלמידים היתה הרגשה טובה שהנה הם עצמם בונים חומר, מנסחים משפטים ומוכיחים אותם, מציגים תרגילים ומנסים לענות עליהם.

בשלב זה אפשר היה כבר להכליל את השיקוף בנקודה למשפחת כל השיקופים $T_{M,-t}$ (t מספר ממשי חיובי) ובשלב הבא עברנו לטרנספורמציה המורכבת $T_{M,-1} \circ T_{M,-t}$ ראינו מהן תכונותיה והרחבנו את משפחת הטרנספורמציות ל- $T_{M,k}$ (k מספר ממשי כלשהו שונה מאפס), שהיא משפחת ההומותטיות.

חומר הלימוד בניסוי הגיע עד שלב זה שרובו גיאומטריה אפינית. בתור המשך, יש להשלים את חומר הגאומטריה האוקלידית הקשור ל"מרחק" ולשם כך יש לבנות מערכת משפטים ותרגילים עבור הטרנספורמציה שיקוף בישר. בעזרת שיקוף בישר אפשר לטפל בנושא המשולש שווה השוקיים ולעסוק במרובעים שהם בעלי ציר סימטריה כמו דלתון, מלבן, מעוין, ריבוע וטרפז שווה-שוקיים.
דרך טרנספורמצית הסיבוב אפשר להגיע אל פרק המעגל ולהוכיח כמה מתכונותיו בעזרת השמורות של סיבובים.

מעניין לציין כי לתלמידים אשר למדו את החומר לא היה רקע קודם בגיאומטריה ואת ידיעותיהם רכשו רק בגישה של טרנספורמציות. לפיכך צפויות היו, ואכן היו, הפתעות בכיתה. למשל, מתוך תגובות התלמידים ורצונם להכליל משפטים ותרגילים בנושא קו אמצעים במשולש ובטרפז נוצרה מערכת משפטים בדבר מקום גיאומטרי של נקודות אשר שיקוף בהן מעתיק ישר אחד על ישר מקביל לו. זה נותן רעיון לכלול את המושג מקום גיאומטרי בתוך חומר הלימוד. רעיון אחר שנבע מתגובות התלמידים הוא לעבד סעיף סביב השאלה מהם התנאים המספיקים לכך שקטעים/זויות יהיו זוג, מקור ותמונה על ידי שיקוף בנקודה. זה מאפשר הבהרת המושגים תנאים הכרחיים ומספיקים.

יש לזכור כי בניגוד לתלמידים המורה המלמד מכיר את החומר בהנדסה בגישה אחרת ולעיתים קרובות ידיעה מוקדמת זו מפריעה לו בפיתוח הנושא. חשוב, אם כן, שלמורים אשר ילמדו בגישה זו תהיה הכנה מתאימה.