

# בחירות ומתמטיקה

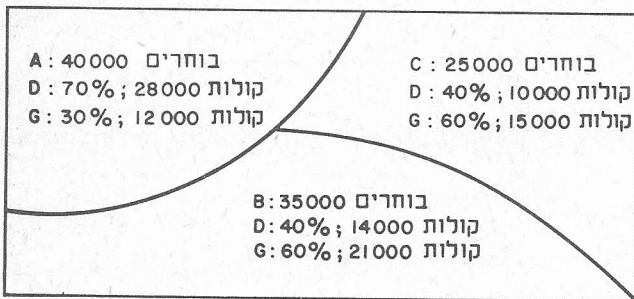
מאת: גב' מונסרה  
תרגום: דוד קרטוזה

להלן שני דפי עבודה לתלמידים:

דף 1: חלוקה לאיזורי בחירות (מערכות לינאריות)

בבחירות לפרלמנט במדינת פפידוליה מתחרות שתי מפלגות D ו-G. הבחירות הן בחירות איזוריות; מחלקים את הארץ לאיזורים ובכל איזור בוחרים ציר אחד, לפי רוב הקולות.

בציור שלפנינו התפלגות הקולות בשלושה איזורים A, B, ו-C.



ציור 1

תוצאות הבחירות באיזורים אלה מדאיגות את הממשלה. המפלגה G מקבלת שני צירים ואילו המפלגה השלטת D, זוכה בציור אחד בלבד. שר הפנים חושב, כי מפלגתו איננה מיוצגת די הצורך בחלק זה של המדינה ולכן הוא מחליט לשנות את החלוקה הגיאוגרפית של שלושת האיזורים כך שהמפלגה D תזכה בכל שלושת הצירים.

שר הפנים נותן לפקידיו לחקור את הבעיה תוך התחשבות בתנאים הבאים:

- יש לחלק כל אחד מהאיזורים A, B, ו-C לשלושה תת-איזורים. את A ל- $A_1$ , את  $A_2$  ו- $A_3$ , את B ל- $B_1$ ,  $B_2$  ו- $B_3$ , ואת C ל- $C_1$ ,  $C_2$  ו- $C_3$  כך שבכל תת-איזור מספר הקולות יהיה  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$  בהתאמה.
- החלוקה היחסית של הקולות בכל תת-איזור תהיה כמו באיזור אליו הוא שייך.

כל איזור חדש יש להרכיב משלושה תת-איזורים. שלושת האיזורים החדשים יהיו:  $(A_1, B_1, C_1)$ ;  $(A_2, B_2, C_2)$ ;  $(A_3, B_3, C_3)$ .

כדי למצוא חלוקה גיאוגרפית צריכים הפקידים לפתור מערכת משוואות ואי-שוויונים. למשל, כדי

שלמפלגה D יהיה רוב באיזור החדש  $(A_1, B_1, C_1)$  חייב להתקיים אי השוויון:

$$0.7a_1 + 0.4b_1 + 0.4c_1 > 0.3a_1 + 0.6b_1 + 0.6c_1$$

$$0.4a_1 - 0.2b_1 - 0.2c_1 > 0$$

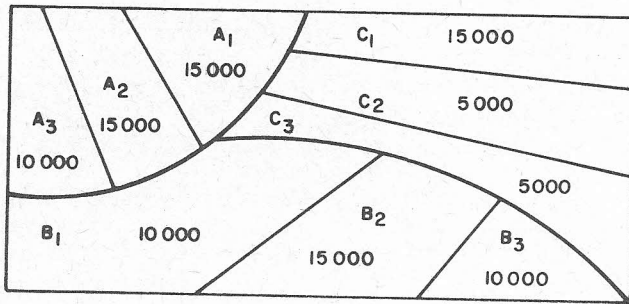
כלומר:

מה הם שני אי-השוויונים הנוספים החייבים להתקיים?

מאידך, חייב להתקיים השוויון:  $a_1 + a_2 + a_3 = 40,000$

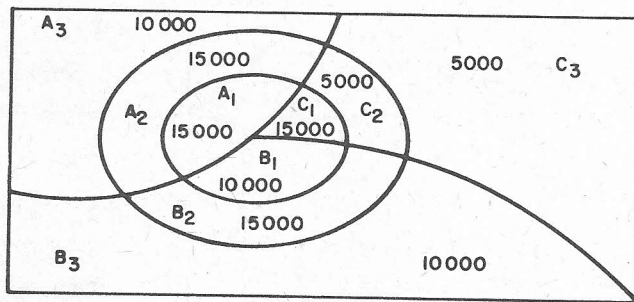
כתוב את שני השוויונים המתייחסים לאיזורים B ו- C.

פקיד פיקח, אשר לא הכיר שיטות פתרון מתמטיות הציע את הפתרון המתואר בציור 2.



ציור 2

מתאר וחלוקה גיאוגרפית זו איננה נוחה הוא הציע את החלוקה הבאה:



ציור 3

### שאלות

1. מצא פתרונות נוספים לשונויים לגמרי מפתרונו של הפקיד.
2. האם יש פתרונות בהם B או C מחולקים לשני תת-איזורים בלבד? האם אפשר לחלק את האיזור A לשני תת-איזורים בלבד?
3. מצא הצגת טופוגרפיות נוספות של האיזורים.
4. ראש הממשלה, מחליט כי יש לחלק איזורים אלה לאיזורים חדשים - השווים במספר קולותיהם (עד כדי 1,000 קולות). מהן תבניות הפסוק החדשות הנובעות מדרישה זו? מצא מספר פתרונות לבעיה.
5. הכלל ל- 4, 5, 6, ..... איזורים ול- 2, 3, 4, ..... מפלגות.
6. האם ניתן לפתור בעיה זו על מחשב קטן?

a c d b .....	238
b a d c .....	85
d c a b .....	68
d a b c .....	255
b d c a .....	18
c d b a .....	7
c b a d .....	9
a b c d .....	8
a d b c .....	12
b a c d .....	6

706 תלמידי החטיבה העליונה בבית הספר התיכון בוחרים נציג להנהלת בית הספר. 4 תלמידים a, b, c ו-d הציגו את מועמדותם. כל תלמיד רושם על פתק את שמות ארבעת המועמדים לפי סדר העדיפות (כאשר המועדף ביותר מופיע במקום השמאלי ביותר וכו'). פתק עליו רשומים ארבעת השמות בסדר עדיפות מסויים נקרא רשימה. מהו מספר הרשימות השונות זו מזו האפשרי? כלומר כמה צירופים שונים של סדר אפשריים לנבי a, b, c, d? תוצאות הבחירות מופיעות בטבלה.

לאחר ספירת הקולות מתברר לאחראים כי אפשר לבחור את הנציג בכמה שיטות.

I. שיטות המתייחסות לכל מועמד:

1. בוחרים כנציג את הראשון ברשימה אשר קיבלה את רוב הקולות.

מי יהיה הנציג לפי שיטה זו?

2. רושמים את מספר הפעמים שכל מועמד מופיע בראש רשימה ובוחרים במועמד אשר שמו

הופיע בראש הרשימה במספר הרב ביותר של פעמים.

מי יהיה הנציג במקרה זה?

3. לכל מקום ברשימה קובעים ניקוד מסויים. למשל, 4 נקודות למקום הראשון, 3 נקודות למקום

השני, 2 למקום השלישי ונקודה אחת למקום הרביעי. עתה סופרים את מספר הנקודות אשר צבר

כל מועמד: מכפילים את מספר הפעמים בו הופיע המועמד במקום מסויים בניקוד המתאים למקום

זה ומסכמים את כל המכפלות.

לדוגמה, מספר הנקודות בהן יזכה a הוא:

$$\begin{aligned}
 &(238+8+12) \cdot 4 \\
 + &(85+255+6) \cdot 3 \\
 &(68+9) \cdot 2 \\
 &\underline{(18+7) \cdot 1}
 \end{aligned}$$

2249 נקודות

לפי הרשימות בהן a נמצא במקום הראשון

לפי הרשימות בהן a נמצא במקום השני

לפי הרשימות בהן a נמצא במקום השלישי

לפי הרשימות בהן a נמצא במקום רביעי

סך הכל

הנציג הנבחר הוא המועמד אשר צבר את המספר הגדול ביותר של נקודות. מי הוא הנציג?

האם אפשר לבחור שיטת ניקוד כך ש-c יבחר לנציג? האם ניתן לבחור את d?

שיטה שונה לגמרי לניתוח תוצאות בחירות היא שיטה המשתמשת בידס בינארי אשר יקרא "ידס עדיפות".  
 רושמים את כל הזוגות האפשריים של המועמדים. בכל זוג, למשל  $(a,b)$  סופרים כמה פעמים  $a$  "הועדף"  
 על  $b$ , כלומר, כמה פעמים הופיע ברשימות  $a$  לפני  $b$ .

דוגמה: 238 תלמידים בחרו ברשימה  $acdb$  לכן  $a$  הועדף על  $b$  238 פעמים. 85 תלמידים בחרו  
 ברשימה  $badc$ , כאן הועדף  $b$  על  $a$  85 פעמים, וכו'. סופרים בצורה זו לכל הזוגות הנגדיים  
 כגון  $(a,b)$  ו- $(b,a)$ . יחס העדיפות מוגדר באופן הבא:

$x$  "מועדף" על  $y$  אם לזוג  $(x,y)$  יש יותר קולות מאשר לזוג  $(y,x)$ .

שרטט את הגרף של יחס זה.

האם אפשר להסיק מתוך הגרף רשימה שתייצג את בחירת 706 התלמידים?

השתמש בשיטה זו ונתח את התוצאות הבאות:

$a c d b$ .....	52
$b a d c$ .....	2
$d a b c$ .....	211
$b c d a$ .....	120
$c d b a$ .....	6
$c b d a$ .....	104
$a d c b$ .....	14
$b a c d$ .....	84

ענה על השאלות שבעמוד הקודם.

שים לב כי היחס אינו טרנזיטיבי. מה ניתן לעשות על מנת לבטל את ההשפעה של תכונה זו?