

בעיה טופולוגית לכתה ט'

חאת: ג' אוקלר (J. A. Auclair), ת. פ. הילמן (T. P. Hillman)
תרגום: אבי דכטר

שבבים- עלון חורי מתמטיקה תיק מס' 5

לעיתים קרובות קשה לשמור על מתח ועל אריה מענינת בשיעורי המתמטיקה בכיתה ט'. הדגשת שיטות חישוב שונות אותן למדו התלמידים פעמים רבות אך טרם הגיעו לשליטה בהן עלולה להיות שגרתית ולא יעילה. חוסר העניין אשר מגלים התלמידים עלול לרפות את ידי המורה במאמציו להכין שיעורים מעוררי ענין ומספקים מבחינה אקדמית. לא תמיד מוכנה הכיתה לקבל גישות חדשות לרעיונות ישנים. רעיונות טובים באמת, הם נדירים.

הבעיה הטופולוגית שלהלן, חורגת מתוכנית הלימודים הרגילה של כיתה ט', ומהווה סטייה מרעננת הממריצה את התלמידים לקראת המשך הלימודים השיגרתיים. במקביל, מעסיק השיעור את התלמידים במשימה אינטלקטואלית אמיתית הדורשת חשיבה מתמטית מאורגנת. הוא גם מאפשר לתלמידים לעבוד בקבוצות קטנות, להתייעץ איש עם רעהו ולהחליף רעיונות ושיטות לפתרון בעיות. השיעור נותן לתלמידים אפשרות להעלות השערות והכללות, ומעל לכל, הוא מבטיח לכל תלמיד הזדמנות להשיג הצלחה אישית.

לשיעור זה קוראים מעבדה מתמטית. המעבדה המתמטית היא שיטה בה רוכשים התלמידים יכולת מתמטית תוך עיסוק בבעיות הלקוחות מן המציאות. השיטה מסבירה לתלמיד: "אנו לומדים מתמטיקה משום שבעזרתה אנו יכולים לפתור בעיות מעשיות אשר הן בעיות מענינות, מציאותיות, ובעיקר בעיות המהוות אתגר". זהו ביטוי לפילוסופיה האומרת: "למידה היא עשייה". תשומת הלב הניתנת לחישובים אינה רבה, הנוהלים בכיתה אינם קבועים ואינם שיגרתיים. הנושאים המתמטיים מתייחסים לבעיות ממשיות ומרתקות.

שיעור המעבדה הבא ניתן בכיתה ט' חלשה מאוד במתמטיקה, כיתה אשר רכשה לעצמה שם של הכיתה הגרועה ביותר בבית הספר. המחברים עבדו עם הכיתה במשך שלושה שבועות ובצעו ניסויים בכמה סוגים שונים של שיעורי מעבדה מתמטית. השיעור הנקרא "צביעה של מפות" נחשב על-ידי הכיתה ועל ידי ראש המחלקה למתמטיקה בבית הספר לשיעור המוצלח ביותר.

בשיעורי המעבדה עבדו התלמידים בקבוצות קטנות של שלושה או ארבעה תלמידים. החלוקה לקבוצות נועדה:

- (1) לאפשר לתלמידים לעזור איש לרעהו כאשר הדבר אפשרי;
- (2) להרשות לתלמידים לשוחח, להחליף רעיונות בחופשיות ולהגיע למסקנות במשותף;
- (3) לתת לתלמידים הזדמנות לעבוד יחדיו, להכיר האחד את יכולת חבריו ולזכות בהערכתם.

Jerome A. Auclair and Thomas P. Hillman, "A Topological Problem for the Ninth-Grade Mathematics Laboratory".

Translated from the Mathematics Teacher, May 1968 (Vol. 61, pp. 503-7), copyright 1968 by the National Council of Teachers of Mathematics. Used by permission.

המדריכים הקדישו תשומת לב לשיבוץ התלמידים הטובים, כך שבכל קבוצה יהיה תלמיד אחראי.

כל קבוצה התבקשה לבחור ביושב ראש אשר תפקידו הם: לתאם את פעולותיה, לדאוג לחלוקת עבודה נכונה ולהבטיח ביצוע המשימות שהוטלו על הקבוצה. נבחר גם מזכיר שתפקידו לרשום את הכללים שהושגו על ידי הקבוצה.

מפות

לאחר הרכבת הקבוצות, ניתנו לתלמידים ההוראות הבאות, הן בעל-פה והן בכתב:

הנך מתבקש לצבוע כמה מפות, בעזרת העפרונות הצבעוניים שניתנו לקבוצתך. צבע כל מפה על פי הכללים הבאים:

(א) עליך להשתמש במספר הקטן ביותר של צבעים.

(ב) צבע בצבעים שונים מדינות אשר להן גבול משותף.

(ג) אם שתי מדינות נוגעות זו בזו בנקודה אחת בלבד יחשב הדבר כאילו אין להן גבול משותף.

(ד) התחומים המסומנים באות "מ" הם שטחי מים ויש לצבעם בכחול. אין לצבוע אף מדינה בכחול.

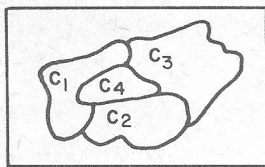
זכור! השתמש במספר צבעים מועט ככל האפשר. השתמש בצבע חדש רק כאשר אין אפשרות אחרת.

הקבוצות החלו לעבוד באופן עצמאי. היו שלושים מפות לצביעה וכל קבוצה נתבקשה להכין רשימה של כללים אותם ניתן היה להסיק מצביעת המפות. במשך זמן העבודה תפקיד המורים היה לעזור לחברי כל קבוצה לעבוד יחדיו ביעילות ולענות לשאלות התלמידים תשובות המכילות אינפורמציה מועטה ככל האפשר. הרגשנו שאסור למורה לעזור לקבוצות בהסקת מסקנות. אם לא עלה בידי קבוצה כלשהיא לגלות אפילו כלל אחד, היה זה חוסר מזל, אך אפשרות סבירה שהתקבלה.

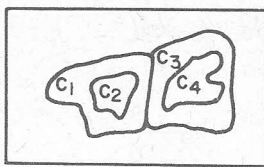
למדריכים היתה מפה גדולה, מסובכת מאד, להעסקת הקבוצות שסיימו את הצביעה מהר מן האחרות.

כאשר הושלמה המלאכה, אספו את רשימות הכללים אך עדיין לא יצרו הכללות עבור הכיתה.

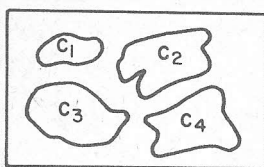
כמה דוגמאות מתוך שלושים המפות ניתנות בשרטוט הבא:



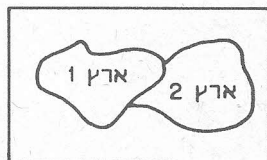
מפה 16



מפה 10



מפה 8



מפה 3

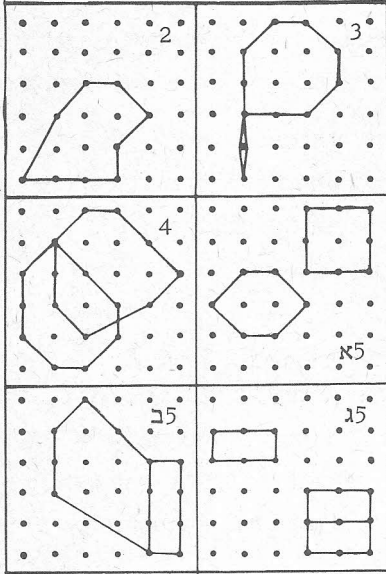
בתרגיל הבא השתמשנו בלוחות גיאומטריים* (Geoboards). ניתן לרכוש לוחות גיאומטריים או לבנותם

בקלות. השתמשנו בלוחות שכללן 36 בליטות או מסמרים, המסודרים בריבוע של 6x6. התלמידים

נתבקשו לבנות מפות תוך שימוש בלוח גיאומטרי וגומיות.

* בחיק "שבבים" 2 ניתן לכל מורה לוח גיאומטרי. הלוח הגיאומטרי מיוצר על-ידי "צעצועי בוקי" וניתן להשיגו אצל "חמד", חברה למשחקים דידקטיים, החשמונאים 7, בני-ברק.

1. יודא שברשותך ג'מיות בעלות חמישה צבעים שונים ולפחות חמש ג'מיות מכל צבע.
2. הנך עומד להתוות ארצות על הלוח בעזרת הג'מיות. לפי הכללים הקודמים של צביעת מפות אפשר לבנות ארץ על הלוח הגיאומטרי על-ידי מתיחת גומיה מסביב לכמה מן הבליטות כמתואר בשרטוט 2.



בנה עתה ארץ על הלוח הגיאומטרי והגש את הלוח לבדיקת ראש קבוצתך.

3. להלן כמה כללים לגבי מונח "ארצות":
 - (א) גומיה המתוחה מסביב לשורת בליטות אחת בלבד אינה מהווה גבול לארץ. ראה שרטוט 3.
 - (ב) בבנותך יותר מארץ אחת אסור שתהיה חפיפה כלשהי בין הארצות. ראה שרטוט 4.

לאחר שהובהרו ההוראות לכיתה נערכה תחרות ראשונית לצורך הכנת התלמידים לקראת התרגילים הקשים יותר שהיה עליהם לבצע. לדוגמה, התלמידים נתבקשו לבנות מפה הכוללת:

1. שתי ארצות הדורשות רק צבע אחד, שרטוט א5.
2. שתי ארצות הדורשות שני צבעים, שרטוט ב5.
3. שלוש ארצות הדורשות רק שני צבעים, שרטוט ג5. המדריכים דרשו מן התלמידים לבנות את המפות במשך זמנים קצובים מראש.

בתום כל זמן קצוב התבקשו התלמידים להגביה את הלוחות לבדיקה ולתיקון על ידי המדריכים. הוצגו בפני הכיתה דוגמאות לפתרונות לא נכונים והוסברו השגיאות. כאשר חשו המדריכים שהתלמידים הבינו את הבעיה ניתנו ההוראות הבאות לכל קבוצה:

1. הנכם מתבקשים לבנות סדרה של מפות על גבי הלוח הגיאומטרי לפי סדר הופעתן בדף הסבר זה.
2. ראש הקבוצה חייב לוודא כי כל חבר בקבוצתו יודע לבנות נכון כל מפה. התייעצו עמו במקרה של קשיים בבנית מפה כלשהי.
3. בנו את המפות הבאות:

- (א) ארץ אחת הדורשת צבע אחד בלבד
- (ב) ארץ אחת הדורשת שני צבעים
- (ג) שתי ארצות הדורשות צבע אחד בלבד
- (ד) שתי ארצות הדורשות שני צבעים בלבד
- (ה) שתי ארצות הדורשות שלושה צבעים

4. כאשר תשלימו את בנית המפות הללו, פנו למורה לקבלת הוראות נוספות.

במהלך תרגיל זה נהגו המורים כבתרגיל הקודם; הם השתתפו מעט ככל האפשר ונמנעו מהסקת מסקנות עבור התלמידים. כאשר השלימה כל קבוצה את התרגיל החזירו לה המדריכים את רשימת הכללים והקבוצה נתבקשה לשפר את המפה שהכינה. נוסף על כך קיבל כל מזכיר שקף שעליו רשם את רשימת הכללים שגילתה הקבוצה כך שניתן יהיה להקרינה בפני כולם.

היות והיו קבוצות שסיימו לפני האחרות, ביקשו מהן המדריכים לבנות על הלוח הגיאומטרי את הצורה המעניינת והמושכת ביותר שאפשר. משימה זו העסיקה קבוצות אלו בעת שהאחרות השלימו את עבודתן.

ההכללות שנמצאו על-ידי הקבוצות הוקרנו בפני התלמידים ונידונו בכיתה. הרשימה הבאה כוללת משפטים אופייניים אשר התלמידים עשויים למצוא:

1. אפשר להשתמש בצבע אחד אם הארצות אינן נוגעות זו בזו או אם הן נוגעות זו בזו בנקודה אחת.
2. יש להשתמש בשני צבעים לפחות אם במפה יש ארצות הגובלות זו בזו ביותר מנקודה אחת.
3. אם ארץ אחת גובלת בשתי ארצות אחרות הגובלות זו בזו, יש להשתמש בשלושה צבעים לפחות.
4. אם ארץ אחת מוקפת שלוש ארצות או יותר הדורשות שלושה צבעים, יש להשתמש לפחות בארבעה צבעים.
5. אם משתמשים בצבע הכחול עבור ים, לעולם אין צורך ביותר מארבעה צבעים אחרים למפה.
6. לעולם אין צורך ביותר מארבעה צבעים לבניית מפה על הלוח הגיאומטרי.
7. אי אפשר להשתמש ביותר צבעים ממספר הארצות שבמפה (בתנאי שאין איזורי מים).
8. על מנת להזדקק לארבעה צבעים על הלוח הגיאומטרי, חייבת להיות ארץ אחת מוקפת כולה.
9. ניתן לבנות ארצות רבות ככל שנרצה בעזרת אחד, שנים, שלושה או ארבעה צבעים.

יתכן כי רשימת ההכללות של כיתה מסויימת לא תדמה בדיוק לרשימה זו, ואסור למורה כיתה כזו להרגיש תרובה לדון בכל הנקודות שבה. החשוב הוא כי התלמידים יכינו את הרשימה בכוחות עצמם.

תוצאותיו של שיעור זה ושל שיעורים אחרים במעבדה המתמטית היו מעורדות מאוד. תלמיד אחר אשר לפני שיעורים אלה בילה את שיעורי המתמטיקה כשהוא יושב שקט בכסאו, בלי להשתתף ובלו להגיש תרגילים, הפך נלהב ונרגש, כשהחלו שיעורי המעבדה, הוא נענה לאתגרים והיה בין התלמידים הבולטים בכיתה. תגובות התלמידים האחרים לשיעורים אלו היו דומות.

המחברים נגשו לשיעור הזה כשבידם רק הפילוסופיה של המעבדה המתמטית, והבעיה של מפה בעלת ארבעה צבעים מתוך ספר טופולוגיה. משני אלו יצרו שיעור בן ארבעה ימים שחרג מן המסורת ונתגלה כמעניין ומלהיב עבור התלמידים - שיעור שלימדם ביתר בהירות את האמצעים ואת הערך של החשיבה המתמטית. שיעור מעבדה זה לא דרש חדר מצוייד בציוד יקר, אך הוא דרש דמיון והכנה מאומצת של המורים. כוונת השיעור היתה לאפשר לתלמידים להבחין, לגלות, לשוחח ולהסיק מסקנות באופן פעיל, בניגוד לשיעורים המסורתיים שהעיקר בהם הוא לימוד חישובים ושיטות באופן פאסיבי. התלמידים דורבנו לחשוב במקום לשנן נושאים מוכרים אך קשים לשליטה.

קיים מחסור בשיעורי מעבדה מתמטית ויש מקום לעבודה רבה בשטח זה. (מורי המתמטיקה חייבים לנסות שיעורי מעבדה וללמוד לבנות שיעורים אשר יצליחו לעורר את התלמידים. רעיונות אלו חייבים לעבור ממורה למורה, להשתכלל ואף להכלל בתוכניות לימודים יעילות ומעניינות יותר במתמטיקה).