המשחק כאמצעי הוראה

מאת: צ׳רלס ברומפיל
תרגום: חנה פרל

פגשתי במשפט מתמטי מעניין! בעקבותיו צץ בי רעיון כיצד לנצלו במשחק. המשחק פשוט ביסודו ובועד לשני משתתפים. כל אחד מהמשתתפים A ו-B מקבל מספר, ושניהם כאחד מקבלים בדיוק אותו מידע בדבר המספרים שבידיהם. מהו מידע זה? למשל, נציג משחק אשר בו המידע הוא: ״המספרים שלכם הם טבעיים, סכומם 5, או 10 או 20״.

B שואל את A ״מהו המספר שלי?״ בדרך כלל A לא ידע, כי המידע הראשוני שקבלו שניהם איננו מספיק. נניח כי במשחק המתואר בדוגמה ניתן ל-A המספר 4 ול-B המספר 6. ברור כי A יודע כי ל-B המספרים 1 או 6 או 16. אבל איננו יודע מהו המספר שבידי B לכן, הוא מוכרח להעביר את זכות הניחוש ל-B. עכשיו שואל A את B: ״מהו המספר שלי?״ אנו משאירים לך, הקורא, להסביר מדוע עתה, צריך B לדעת כי ל-A המספר 4.

אפשר להפוך משחק זה למסובך מאד או למשחק פשוט על ידי שינוי מחוכם של המידע המשותף. מבחינה תיאורטית אפשר לבנות משחק בו כל שחקן יענה ״לא״ מספר רב של פעמים בטרם יצטבר בידי אחד השחקנים מידע מספיק כדי לנצח. עובדה זו איננה גלויה במבט ראשון. אנו נוטים לחשוב כי אחרי מספר מסויים של תשובות שליליות (״לא״) כבר אין טעם להמשיך כי תשובות שליליות נוספות לא תספקנה מידע מועיל נוסף. אולם אין הדבר כך!

כפעילות תחרותית יש למשחק זה מגבלות: א. המידע הראשוני קובע לגמרי מי ינצח ובכך מאבדים את יצר התחרות הקיים במשחקים רבים. ב. הטיעונים ההגיוניים שבמשחק חוזרים על עצמם. רוב ההוכחות מורכבות מטענות כמו: ״אני יודע כי ל-A יש 4 או 14. אם ל-A יש 14, היה A יודע מהו המספר שבידי. אבל A לא ידע, לכן ל-A המספר 4״. אם כך הוכחת את המשחק שתארנו בתחילת המאמר הרי ש״תפסת את הפרינציפ״.

במהלך המשחק נטפל בכמה אספקטים: (1) טיעונים לוגיים (2) נסוחים ברורים לטיעונים (3) מושגים מתמטיים בסיסיים (4) מיומנות חישוב. שחקתי משחק זה עם תלמידים מכל הרמות ומכל הגילים, מתלמידי כיתות ד׳-ה׳ ועד למתמטיקאים ידועי שם. להפתעתי כמעט ואין הבדל בבצועו!!!

הדרך הטובה ביותר להדגמת טווח הפעולה של המשחק היא באמצעות דוגמאות. לארבעת המשחקים הראשונים שנתאר נתן הוכחות מלאות. כמו כן נציג סדרת משחקים בהם תוכל לנסות כוחך! משחקים 1-4 הם משחקים העוסקים במספרים שלמים אי-שליליים. נתאר להלן אחת מדרכי המשחק. נותנים לכל שחקן כרטיס עליו כתובים המידע המשותף והמספר שניתן לו.

<u>משחק 1</u>

כרטיס A	כרטיס B
סכום שני המספרים הוא 5 או 6 מספרך הוא 5	סכום שני המספרים הוא 5 או 6 מספרך הוא 0

Charles Brumfiel, "Using a Game as Teaching Device".
Translated from the <u>Mathematics Teacher</u>, May 1974 (vol. 67, pp. 486-91) copyright 1974 by the National Council of Teachers of Mathematics. Used by permission.

A יודע רק כי מספרו של B הוא 0 או 1 מאחר ו-A העביר את תורו ל-B, יודע B כי ל-A המספר 5 הנה ההוכחה של B: "היות ולי יש 0 ל-A חייב להיות 5 או 6. אם ל-A היה 6 הרי היה יודע כי לי 0, וזאת, כי אנו משחקים רק במספרים שלמים אי-שליליים ולא יתכן כי לי יהיה (1-). היות ו-A לא ידע את מספרי מכאן שמספרו של A איננו יכול להיות 6. ל-A המספר 5".

ההסברים אינם חייבים להיות כה מדוייקים, אבל הוכחתו של המנצח חייבת להיות בהירה ולהתקבל על דעת מתחרהו. כרגיל, בהוכחות מתמטיות, שלמות ההוכחה תלויה בהבנה ההדדית שבין המתחרים. למשל, במשחק 1, בודאי יאמר B: "ל-A המספר 5 כי אם היה לו 6, היה מנצח", ו-A היה ללא ספק, מקבל הסבר זה.

משחק 2

במשחק 2 נשתמש בסימונים אלגבריים.

בכיתות הי-וי יש חשיבות לעצם השימוש בכתיב האלגברי.

כרטיס A	כרטיס B
$x + y = 5$	$x + y = 5$
או	או
$x + y = 6$	$x + y = 6$
מספרך 5	מספרך 1

A מעביר את תורו ל-B היודע עכשיו כי ל-A המספר 4 או 5. אולם, בשני מקרים אלה A היה מעביר את תורו, לכן גם B מוכרח להעביר את תורו. עכשיו A יודע את מספרו של B. הוא מסביר: "ל-B המספר 0 או 1. לא יתכן כי 0 הוא מספרו של B, כי לו הזה מספרו 0 היה יודע כי לי 5, אך B לא ידע זאת, לכן ל B המספר 1 ולא 0."

הקורא ודאי ישים לב לקשר בין משחק 1 למשחק 2. אם A ו-B ישחקו במשחק 2 מיד אחרי משחק 1, יסתכל A במספרו 5, יזכר במשחק 1 ויהרהר: "אם ל B המספר 0, משחק זה הוא כמו משחק 1, ואז B ינצח". כאשר B איננו מנצח, A יודע כי ל B אין 0.

משחק 3

נאמר כי למשחק 1 רמת קושי 1. כדי לנצח, חייב B לדעת כי A איננו יודע מהו מספרו. למשחק 2 רמת קושי 2. כדי ש-A ינצח, מספיק ש-A ידע כי B לא יכול לקבוע את מספרו, למרות ש-B יודע כי A איננו יודע את מספרו של B. תאר לעצמך עד כמה שפה זו יכולה להיות מסובכת!

כרטיס A	כרטיס B
$x - y - 3$	$x - y = 3$
מספרך 14	מספרך 11

למשחק 3 רמת קושי 3.

התגובות במהלך המשחק הן:

	סיבוב ראשון	סיבוב שני
A	לא	לא
B	לא	כן!

ברור כי כאשר A מעביר את תורו בפעם הראשונה הדבר איננו עוזר כלל ל-B, היות והוא יודע כי ל-A המספר 8 או 14 ובשני המקרים חייב A להעביר את תורו. לכן, B יכול לצפות מראש כי A יעביר את תורו. ה"לא" השני של A כבר נותן ל-B את הפתרון. הנה ההוכחה של B: "ל-A המספר 8 או 14. אני אוכיח כי אין לו 8. אם ל-A היה 8, היה יודע כי לי 5 או 11. כאשר העברתי את תורי בפעם הראשונה A היה מסיק כי אין לי 5, כי אם היה לי 5 הייתי יודע, כאשר העביר A את תורו, כי מספרו 8 ולא 2. (לו היה ל-A המספר 2 היה מנצח מיד כי אנו משחקים רק במספרים שלמים אי-שליליים). היות ו-A לא ידע מהו מספרי בסיבוב השני, לא יתכן כי יש לו 8. ל-A המספר 14".

באופן מעשי תהיה ההוכחה של B גירסה מקוצרת של ההוכחה דלעיל. נעיר מספר הערות בטרם נמשיך במשחק 4, אשר לא יהיה בעל רמת קושי 4. תלמיד פקח מכיתה ה' ופרופסור למתמטיקה ישחקו בהצלחה רבה משחקים בעלי רמת קושי 2. שניהם יתחילו לטעות ברמת קושי 3. סטודנט מסור הלומד לקראת תואר שני במתמטיקה יוכל להתמודד עם משחק ברמת קושי 3, אבל משחק ברמת קושי 4 עשוי להיות מסובך מדי. ההסברים המילוליים נעשים ארוכים מדי וקשה לזכרם. כאשר מציגים בפני מתמטיקאי משחק ברמת קושי 4 או 5 הוא מאמץ לו גישה ערמומית. הוא מבין את המגבלות שבהסברים מילוליים ולכן יפתח מערכת סמלים חזקה ויעילה שתוכל לענות לשאלות המוצגות בפניו. האתגר המתמטי המעניין ביותר המוצג במשחק זה הוא: פיתוח אלגוריתם הקובע בכל משחק נתון, מי ינצח ומתי. אם מפתחים אלגוריתם כזה מאבדים את ההתלהבות וההנאה שניתן להפיק מהמשחק. לכן, כרגע, לא נעודד את קוראינו לחפש פתרון מסוג זה.

<u>משחק 4</u>

במשחק 4 נצביע על אפשרות לימודית נוספת. במקום לומר לכל שחקן מה מספרו, נתן לו לפתור בעיה קטנה כדי לגלות מהו מספרו.

כרטיס A	כרטיס B
$xy = 10$ או $xy = 100$ מספרך הוא המספר המקסימלי של נקודות חיתוך הנוצרות על ידי 5 קוים.	$xy = 10$ או $xy = 100$ מספרך הוא המספר המקסימלי של קוים הנקבעים על ידי 5 נקודות.

A מעביר את תורו; B מעביר; A מנמק: "מספרי 10. ל-B המספר 1 או המספר 10. אולם, אם ל-B המספר 1 היה B צריך לדעת, כאשר העברתי את תורי, כי לי אין 100. אבל גם B העביר את תורו. לכן ל-B המספר 10".

במשחקים הבאים אין חידוש רב במבנה ההוכחות. נדגים מבחר מושגים מתמטיים בהם, אפשר להשתמש. ישנן אפשרויות בלתי מוגבלות לכושר היצירה וכושר ההמצאה בהרכבת משחקים מעניינים. נתאר כל משחק על-ידי הצגת המידע המשותף והמספר שבידי המנצח, נרשום את מספרו של A רק אם A מנצח ואת מספרו של B רק אם B מנצח*.

---

*הערת המערכת: על מנת לדעת מהו מספרו של המשתתף השני צריך הקורא לפתור את המשחק על פי המהלך המתואר.

משחקים 12-5 עוסקים במספרים שלמים אי-שליליים בלבד.

<u>משחק 5</u>

$x : y = 2$, מספרו של A הוא מספר המטרים בעשירית הקילומטר. A מנצח אחרי ש B מעביר את תורו.

<u>משחק 6</u>

$x : y = 5$ ו $x < 1000$, המספר של B הוא מספר הסנטימטרים אשר ב-30 אינטש. (ב 12 אינטש יש 30 סנטימטרים). A מעביר את תורו ו-B מנצח.

<u>משחק 7</u>

96 או 12 או $xy = 6$, ל-B המספר 12.
A מעביר את תורו ו-B מנצח.

<u>משחק 8</u>

96 או 12 או $xy = 6$, מספרו של A הוא 4
A מעביר את תורו, B מעביר את תורו ו-A מנצח.

<u>משחק 9</u>

96 או 12 או $xy = 6$, מספרו של B הוא 3.
A מעביר את תורו, A מעביר שוב ו-B מנצח.

<u>משחק 10</u>

6 או 4 או $x + y = 1$, זה איננו המקרה אשר בו ל-A המספר 1 ול-B המספר 3. מספרו של A הוא 1. A מעביר את תורו, B מעביר ועתה A צריך לנצח. (בהעדר התנאי כי אין לשחקנים המספרים 1 ו-3 המשחק לא היה מסתיים לעולם).

<u>משחק 11</u>

6 או 4 או $x + y = 1$ זה איננו המקרה בו ל-A המספר 1, ול-B המספר 3. מספרו של A הוא 0. A מעביר את תורו, B מעביר, A מעביר שוב וכן גם B. עתה A מנצח.

<u>משחק 12</u>

$xy = 2000$ או $x + y = 100$, מספרו של B הוא 40. A מעביר את תורו ו-B מנצח.

משחקים 18-13 עוסקים במספרים רציונליים חיוביים בלבד.

<u>משחק 13</u>

$xy = 1$ או $xy = \frac{1}{2}$, ו $x + y < 3$, מספרו של B הוא הקטן שבין $\frac{1}{3}$ ו $\frac{5}{16}$, A מעביר את תורו ו-B מנצח.

<u>משחק 14</u>

$x - y = \frac{1}{4}$ ו $xy > \frac{1}{16}$, מספרו של A הוא $\frac{1}{8}$.
A מעביר את תורו, B מעביר ו-A מנצח.

<u>משחק 15</u>

$x - y = \frac{1}{4}$ ו $xy < 3$, מספרו של A הוא הממוצע של $\frac{3}{4}$ ו $\frac{3}{2}$. A מעביר את תורו. B מעביר, A מעביר שוב וכן גם B. עכשיו A יכול לנצח.

<u>משחק 16</u>

$y = \frac{4X-3}{4X-2}$ מספרו של B גדול מ $\frac{1}{2}$. מספרו של B הוא היקף העיגול אשר קוטרו $\frac{2}{\pi}$. כאשר A מעביר את תורו B יכול לנצח.

<u>משחק 17</u>

$xy = 1$ או $xy = \frac{1}{2}$, מספרו של A גדול מ $\frac{1}{4}$. מספרו של A הוא ההסתברות לקבל "ראש" בזריקת 3 מטבעות. A מעביר את תורו, B מעביר ו-A מנצח.

משחק 18

$xy = \frac{2}{5}$ או $xy = \frac{1}{2}$, מספרו של B הוא $\frac{3}{5}$.
A מעביר את תורו ו B מנצח.

משחקים 19-31 עוסקים במספרים שלמים.

משחק 19

$x + y = 0$ או $x + y = 1$ כמו כן
$x > -2$ ו $y > -2$, ל-B המספר (-1).
A מעביר את תורו ו-B מנצח.

משחק 20

$x + y = 0$ או $x + y = 1$ כמו כן
$x > -2$ ו $y > -2$, ל-A המספר 1.
A מעביר את תורו, B מעביר ו-A מנצח.

משחק 21

$xy = 6$ או $xy = -12$, ל-A המספר (-1).
A מעביר את תורו, B מעביר, ו-A מנצח.

משחק 22

24 או (-2) או $xy = 12$, מספרו של B
גדול ממספרו של A. ל-A המספר (-6).
A מעביר את תורו, B מעביר ו-A מנצח.

משחק 23

$|x| + y = 20$, מספרו של A גדול מ (-50).
ל-B המספר 10. A מעביר את תורו, B מעביר,
A מעביר שוב ו-B מנצח.

משחק 24

$|x| + y = 5$ ו $(-10) < x < y$, ל-B המספר
(-3). A מעביר את תורו ו-B יכול לנצח.

משחק 25

$|x| + 2y = 30$, מספרו של A הוא 50. ברור כי
A מנצח מיד.

משחק 26

$|x| + 2y = 30$ ו $|x| < 100$, מספרו של B הוא
(-50). A מעביר את תורו, עתה יכול B לנצח.

משחק 27

$|x| + 2y = 30$ ו $|x| < 100$, מספרו של A
10. A מעביר את תורו, B מעביר ו-A מנצח.

משחק 28

$|x-y| = 10$ ו $|x|+|y| < 100$, מספרו של A הוא 30.
A מעביר את תורו, B מעביר ו-A יכול לנצח.

משחק 29

$|x+y| = 1$ ו $|x-y| < 30$, מספרו של B הוא 12.
שלוש פעמים מעבירים השחקנים את זכות הניחוש
לבן זוגם ולבסוף B מנצח.

משחק 30

$|x+y| = 1$ ו $|x-y| < 30$ מספרו של A הוא (-11).
שני השחקנים מעבירים את תורם פעמיים ו-A מנצח.

משחק 31

$|x+y| = 1$ ו- $|x-y| < 30$ מספרו של B הוא 10.
המשחק צריך להתנהל כדלקמן:

	סיבוב ראשון	סיבוב שני	סיבוב שלישי
A	לא	לא	לא
B	לא	לא	כן!

אם הצלחת לנסח הוכחה למשחק 31, אתה ראוי להערכה. מהי רמת הקושי של המשחק? האם תוכל ליצור שיטה המסבירה את המשחק באמצעות סמלים, ויעילה יותר מאשר ניסוח מילולי של ההוכחה?

משחקים 36-32 עוסקים במספרים רציונליים חיוביים או שליליים.

<u>משחק 32</u>

$x = \frac{1}{1-y}$, מספרו של A הוא $\frac{1}{3}$. זו דוגמה למשחק שבו אף שחקן אינו יכול לנצח. האם הינך יכול להוכיח זאת?

<u>משחק 33</u>

$x = \frac{1}{1-y}$, מספרו של A קטן מ 1. ל-A המספר $\frac{1}{3}$. מאד מפתיעה העובדה כי כאשר מפשטים את משחק 32 בצורה זו, A מנצח. A ו-B מעבירים את תורם פעם אחת ומיד A יכול לנצח. במבט ראשון ניתן היה לצפות כי המידע הנוסף בדבר מספרו של A יעזור ל-B לנצח, אולם להיפך, במקרה זה הוא מאפשר ל-A לנצח.

<u>משחק 34</u>

$x = -2y + 3$, מספרו של B הוא מספר שלם. מספרו של A הוא (-3). A מעביר את תורו. B מעביר ו-A מנצח.

<u>משחק 35</u>

$|x| + y = -\frac{1}{2}$, מספרו של A היא נקודת האמצע של הקטע אשר קצותיו הם $(-\frac{3}{2})$ ו-0. A מעביר את תורו, B מעביר ו-A מנצח.

<u>משחק 36</u>

$x + y = 0$ או $x + y = 1$, $x < 2$ ו- $y < 2$, מספרו של A הוא $\frac{1}{2}$. A ו-B מעבירים את תורם פעמיים ו-A מנצח.

משחקים 37 ו-38 מציגים פרדוקס הבולט לעין כבר במבט ראשון. אם הינך שייך לסוג האנשים אשר בעיות בלתי פתורות גורמות להם לנדודי שינה, אנו מציעים לך לפסוח עליהם. משתמשים בשני משחקים אלה במספרים שלמים.

<u>משחק 37</u>

$x + y = 1$ או 2 או 4, ל-A המספר 1 ול-B המספר 1. הוכח כי גם A וגם B אינם יכולים לקבוע את מספרו של בן זוגם.

שים לב במשחק 37 מיד כאשר A מעביר את תורו, B יודע כי ל-A המספר 0 או המספר 1. באופן דומה כאשר B מעביר את תורו, A יודע כי ל-B המספר 0 או המספר 1 אבל אף שחקן אינו יכול לבטל לגבי מתחרהו את אחת האפשרויות, לכן המשחק אינו מסתיים.

שים לב גם לעובדות הבאות:

A יודע כי סכום המספרים הוא 1 או 2

B יודע כי סכום המספרים הוא 1 או 2

A יודע כי B יודע כי הסכום הוא 1 או 2 (מדוע?)

B יודע כי A יודע כי הסכום הוא 1 או 2 (מדוע?)

עתה התבונן במשחק 38

<u>משחק 38</u>

$x + y = 1$ או 2, ל-A המספר 1 ול-B המספר 1. האם הינך רואה כי אחרי ש-A מעביר את תורו ו-B מעביר את תורו A יכול לנצח? כיצד יתכן דבר זה? הרי במשחק הקודם שני השחקנים ידעו כי הסכום איננו 4, אם כן מדוע ביטול העובדה כי סכום המספרים איננו 4 משנה את המשחק?

עכשיו הסתכל במשחק 39 בו עוסקים במספרים שלמים.

משחק 39

$x + y = 1$ או 2 או 4, זה אינו המקרה בו לשני
השחקנים A ו-B המספר 2. אם ל-A ול-B המספר 1
מי ינצח? באיזה סיבוב?

כפי שרמזתי אפשר לנתח באופן מתמטי משחקים מסוג זה. אפשר לפתח אלגוריתמים לכל משחק נתון, אפשר לקבוע אם המשחק יסתיים או לא ומי ינצח בו. האלגוריתם גם יקבע מתי יסתיים המשחק. לדוגמה, התבונן במשחק הבא המוגבל למספרים השלמים.

משחק 40

$x + y = 999$ או $x + y = 1000$,
ל-A ול-B המספר 500.

אם משחקים משחק זה נכון, יענו שני השחקנים 500 פעם "לא"! A ינצח בסיבוב ה-501 מהי רמת הקושי של משחק זה?

מאד מעניין לחפש שיטות לנתח משחקים אלה. אם יש בין קוראי ה- Mathematics Teacher אנשים המעוניינים להתעמק ברעיונות אלה, אשמח להתכתב עמם ולהעביר להם את התוצאות אשר בידי.
רמז: נסה שיטות גרפיות.

המעניין אותי הוא לדעת אם אפשר להשתמש במשחק זה כדי ללמד תלמידים כיצד לנמק וכיצד לבנות טיעונים הגיוניים. בשימושי במשחקים אלה נתתי לתלמידים מערכות של ארבעה כרטיסים לכל משחק. כרטיס מידע, כרטיס עם מספרו של A, כרטיס עם מספרו של B וכרטיס הסבר. את כרטיס המידע מעמידים בפני שני השחקנים כך ששניהם יוכלו לראות את המידע המשותף להם. A ן-B מתבוננים בכרטיס ו-A שואל את B אם יודע הוא מהו מספרו. המשחק מתקדם שלב אחר שלב עד לסיומו ההגיוני (או הבלתי הגיוני) ואז מתבוננים השחקנים בכרטיס ההסבר כדי לוודא כי אמנם הציגו את הנימוקים המתאימים.

המשחק איננו מלווה באוירה תחרותית. השחקנים מגיעים מהר מאד למסקנה כי ה"מנצח" נקבע מראש ולכן המשחק הוא למעשה רק תרגיל בהנמקה. כאשר השחקנים שואלים איש את רעהו לנימוקיהם, הם מחליפים ביניהם דעות ומסבירים איש לרעהו כיצד פתרו את הבעיה. נתתי משחקים אלו גם לקבוצות, קבוצות של שלושה כנגד שלושה הן גדולות מדי ולעתים קרובות אחד השחקנים נותר בצד. המשחק מתנהל יפה בקבוצות של שניים.

לדעתי, יצירת המשחקים מאד מאלפת. כאשר מלמדים מורים לעתיד משחקים אלו, ניתן ללמדם תוך כדי משחק מעט מתמטיקה. מציגים לשחקנים את מספריהם על ידי משפטים הדומים לאלו:
מספר האלכסונים במשושה.
מספר הפאות הנפגשות בקודקוד של פאון בעל שמונה פאות.
מספר הקבוצות החלקיות של קבוצה בת שני איברים.
ההסתברות לקבל פעמיים "ראש" בזריקת 4 מטבעות.

אהיה מעונין לשמוע מקוראים אשר ישתמשו בכתותיהם במשחקים אלו. כאשר התחלתי לכתוב מאמר זה התכוונתי להציג מספר עקרונות מתמטיים הקשורים למשחק. לדוגמה, כיצד ניתן להבחין בין משחקים אשר לעולם לא יסתיימו (כגון: 4 או 2 או 1 = $x + y$, ל-A המספר 1, ל-B המספר 1) לבין משחקים אשר יש בהם מנצח? כיצד בונים משחקים ברמת קושי נתונה?

אזכיר הכללה של משחק זה. נתאר חדר ובו n אנשים. לכל אדם, מודבק על המצח פתק שעליו כתוב מספר שלם, כך שכל אחד יודע מהם כל המספרים, פרט למספר אשר רשום על מצחו. על לוח המוצג בפני כל האנשים רשומים n מספרים. השחקנים יודעים כי אחד מ-n המספרים הללו הוא סכום כל המספרים אשר רשומים על מצחם. נסמן את המשתתפים במשחק ע"י $A_1, \ldots\ldots, A_n$. A_1 מתחיל את המשחק ואומר לכולם אם יודע הוא מהו מספרו או לא. אם A_1 אומר "לא" מגיע תורו של A_2 וכך הלאה. אם בסיבוב הראשון כל השחקנים אומרים "לא", A_1 מתחיל את הסיבוב השני. המשחק שתארנו הוא למעשה הגירסה של משחק זה לשני אנשים.

המתמטיקאי הבריטי קונווי (Conway) הוכיח כי במשחק המוכלל, מבחינה תאורטית, יש תמיד מנצח. אבל כדי שאמנם כך יקרה, השחקנים חייבים להיות יצורים הגיוניים לחלוטין. במציאות, השחקנים יתבלבלו ללא תקנה במשחק מסובך זה. לפניכם משחק ל-3 אנשים אשר קרוב לודאי מסובך מדי לנמק בעזרת הסברים מילוליים, ללא עזרת סימול מתמטי.

4 או 3 או 2 = $x + y + z$, לשלושת השחקנים A, B ו-C המספר 1. אם תתבונן מעט במשחק הוא יראה לך פרדוקסלי. עוד לפני ש A מתחיל לשחק, כל שחקן כבר יודע כי מספרו הוא או 1 או 2. יתר על כן, כל שחקן יודע כי בסיבוב הראשון כולם יותרו על תורם, אם כן, מה ילמדו השחקנים מהתשובות השליליות של חבריהם בסיבוב זה? אולם לפי משפטו של קונווי חייב לנצח אחד השחקנים. מיהו? ומתי ינצח?

נציין תכונה מעניינת נוספת של המשחק. התבונן במשחק הבא:

1 = $x + y$ או 2 = $x + y$, ל- A המספר 1 ול-B המספר 1.

אם מניחים כי x ו-y הם שלמים, המשחק לא יסתיים לעולם. אך אם נפשט את המשחק על ידי התנאי המגביל: מספרו של A גדול מ (100-) המשחק יסתיים. במבט שטחי נראה הדבר חסר הגיון, כי מלכתחילה B יודע כי ל-A מספר הגדול מ (100-). A יודע כי B יודע זאת. B יודע כי A יודע ש-B יודע זאת. A יודע כי B יודע כי A יודע ש-B יודע זאת, וכן הלאה עד אין סוף. כיצד מידע טריואלי זה יכול להשפיע על המשחק?

שחק ותהנה. אם תקבל תגובות מעניינות מתלמידך או תגלה רעיונות מעניינים לבנית משחקים דומים אשמח לשמוע על כך.