בעיות

1. מהן כל הפונקציות הממשיות המקיימות: $f(x) \cdot f(y) = f(x-y)$

2. מהם כל הפתרונות של מערכת המשוואות:

$$x_1 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 2 \qquad x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 = 2$$

$$x_2 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 = 2 \qquad x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 2$$

3. נתון משולש אשר צלעותיו הן a, b ו- c הגבהים במשולש הם h_a , h_b ו- h_c
הוכח כי אם $a > b$ אז $a + h_a > b + h_b$

4. נתון: $(x^2 + x + 1)^{19} = a_0x^{38} + a_1x^{37} + \dots + a_{38}$
הוכח כי: $a_0^2 - a_1^2 + \dots + a_{38}^2 = a_{19}$

פתרון בעיות מ"שבבים" 4

נערך על ידי י. גיליס

1. פתור את המשוואה: $x^4 + (a-2)x^3 - 2ax^2 - a(a+2)x - a^2 = 0$

<u>פתרון</u>

$$x^4 + (a-2)x^3 - 2ax^2 - a(a+2)x - a^2 = (x^2-2x-a)(x^2+ax+a)$$

כלומר, המשוואה הנתונה מתפרקת לשתי משוואות ריבועיות.
דרך אחרת לפתרון היא לכתוב את המשוואה כמשוואה ריבועית של a .

$$(x+1)a^2 - x(x^2-2x-2)a - x^3(x-2) = 0$$

פותרים אותה עבור a ומקבלים כי $a = x(x-2)$ או $a = -\dfrac{x^2}{x+1}$
שני ביטויים אלה נותנים את שתי המשוואות הריבועיות של x. הפתרונות הם

$$x = \frac{-a \pm\sqrt{a^2 - 4a}}{2} \quad \text{או} \quad x = 1 \pm\sqrt{1+a}$$

כדי שכל השורשים יהיו ממשיים יש לדרוש

1. $a + 1 \geq 0$ כלומר $a \geq -1$
2. $a^2 - 4a \geq 0$ כלומר $a \geq 4$ או $a \leq 0$

מכאן מקבלים כי התנאים עבור a הם

$$-1 \leq a \leq 0 \quad \text{או} \quad a \geq 4$$

2. נתון $x = 2397$ חשב את

$$x^{100} - 2398x^{99} + 2398x^{98} - 2398x^{97} \dots -2398x + 2400$$

<u>פתרון</u>

הסכום שווה ל- 1 $x^{100}-(x+1)\{x^{99}-x^{98}+x^{97} \dots + x-1\} + 2 = x^{100} - (x^{100}+1) + 2 = 1$

3. נתון כי $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k = n$

כאשר n הוא מספר טבעי ו- $x_1,\dots,x_k$ הם גורמיו השונים (פרט ל-n עצמו)

הוכח כי: $n = p^3$ כאשר p מספר ראשוני או n הוא מכפלה של שני מספרים ראשוניים.

<u>פתרון</u>

אם n מתפרק ליותר משני גורמים ראשוניים שונים אפשר לכתוב $n = pqm$ כאשר p ו- q הם מספרים ראשוניים ו- $m > 1$. מאחר ו- pm, qm הם גורמים שונים של n נקבל כי:

$$n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \geq pm \cdot qm = pqm^2 = nm > n$$

סתירה! מכאן נובע כי לא יתכנו יותר משני גורמים ראשוניים שונים.

נניח כי יש ל- n שני גורמים ראשוניים שונים, נכתוב $n = p^\alpha \cdot q^\beta$ אם $\alpha > 1$ אזי p^α ו- pq^β הם שני גורמים הקטנים מ- n לכן:

$$n = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \geq p^\alpha \cdot pq^\beta = pn$$

סתירה! לכן במקרה של שני גורמים ראשוניים תתכן רק האפשרות $n = pq$

אם ל- n יש רק גורם ראשוני אחד אזי $n = p^\alpha$ והגורמים השונים הם $1, p, p^2, \dots, p^{\alpha-1}$

לכן: $$p^\alpha = 1 \cdot p \cdot p^2 \dots \cdot p^{\alpha-1} = p^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}}$$

ומכאן: $$\alpha = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$$

$$\alpha = 3$$

4. נתון הטור $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \frac{9}{400} + \dots$

מהי הנוסחה של האיבר ה n-י. חשב את סכום 100 האיברים הראשונים.

<u>פתרון</u>

האיבר ה n-י הוא

$$U_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

לכן

$$\sum_{n=1}^{100} U_n = \left[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right] + \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right] + \dots + \left[\frac{1}{99^2} - \frac{1}{100^2}\right] + \left[\frac{1}{100^2} - \frac{1}{101^2}\right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{(101)^2}$$

5. האם יתכן כי $\sqrt{\sin\alpha}$ ו- $\sqrt{\cos\alpha}$ יהיו שניהם רציונליים עבור α המקיים $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?

<u>פתרון</u>

לא יתכן! כי אם $\sqrt{\sin\alpha}$ ו- $\sqrt{\cos\alpha}$ רציונליים, נוכל לכתבם עם מכנה משותף

$$\sqrt{\cos\alpha} = \frac{s}{n}\ ,\ \sqrt{\sin\alpha} = \frac{r}{n}$$

ואז:

$$\left(\frac{r}{n}\right)^4 + \left(\frac{s}{n}\right)^4 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

כלומר:

$$r^4 + s^4 = n^4$$

אולם דבר זה לא יתכן על פי משפט פרמה (Fermat) למעריך 4. פרמה עצמו הוכיח מקרה זה.