משוואות פונקציונליות

מאת סטפן ב. מורר (Stephen B. Maurer)

תרגום א. דכטר

בבית הספר התיכון מדגישים באופן מיוחד את נושא הפונקציות. התלמידים יודעים כי הפונקציה הינה התאמה בין שתי קבוצות, כי הקבוצות אינן של מספרים דוקא, וכי גם אם הן קבוצות מספרים, ההתאמה אינה חייבת לנבוע מחוק אלגברי. כמו כן מוכר הסימון $f(x)$. אבל למעשה רוב הפונקציות בהן נתקלים התלמידים במשך הלימודים הם יחסים אלגבריים מסורתיים, לדוגמא: $f(x) = 3x+2$. לכן מסיקים תלמידים רבים כי למרות הכל פונקציות ונוסחאות הן בעצם אותו דבר. הם גם סבורים ש- $f(x)$ הוא בסך הכל שם מוזר ומיותר ל- y .

אם נאמץ את נקודת ההשקפה, שהמשמעות של הפונקציות טמונה לעיתים קרובות בתכונותיהן נבין את יתרון הפונקציות על הנוסחאות וכן את ערך צורת הסימון של הפונקציה.
ניקח לדוגמא את הפונקציה הלוגריתמית (בסיס כלשהו). אין לה נוסחה ולמרות זאת אנו מרבים להשתמש בה בגלל תכונתה המיוחדת במינה - הפיכת כפל לחיבור. ליתר דיוק, כדי לקבל את הלוגריתם של מכפלה, עלינו לחבר את הלוגריתמים של הגורמים.

אפשר לבטא זאת בפשטות בעזרת מושג הפונקציה:

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad (1)$$

ללוגריתמים יש תכונות חשובות נוספות אשר גם אותן ניתן לבטא בפשטות על-ידי השימוש במושג הפונקציה. לדוגמא, לוגריתמים הופכים העלאה בחזקה לכפל כלומר,

$$f(x^n) = nf(x) \qquad (2)$$

שוויונים כגון (1) ו- (2) נקראים משוואות פונקציונליות. לדעת המחבר ניתן ואף רצוי לעשות שימוש נרחב במשוואות פונקציונליות בלימוד המתמטיקה בבית הספר התיכון.

שימושים של משוואות פונקציונליות

ניתן להשתמש במשוואות פונקציונליות לצורך לימוד נושאים רבים. בלוגריתמים נטפל בפירוט מאוחר יותר. להלן נתאר כמה נושאים אחרים הנלמדים בבית הספר התיכון.

השתנות ישרה

ההגדרה המקובלת $f(x) = mx$ מספקת נוסחה קלה לעבודה, אולם היא אינה מסבירה את השם. השתנות ישרה משמעותה היא שכאשר משתנה אחד המשתנים, גם השני עושה כן באותו אופן.

S.B. Maurer, "Functional Equations in Secondary Mathematics". Translated from the Mathematics Teacher, April 1974 (Vol.67, pp.293-98), copyright 1974 by the National Council of Teachers of Mathematics. Used by permission.

$f(x) = mx$ אומר רק שמשתנה אחד הוא כפולה של השני. כמובן, התלמיד לומד במהרה משפט המצדיק את השם:

אם המשתנה הבלתי תלוי מוכפל ב- k, כך גם המשתנה התלוי.

בעזרת משוואה פונקציונלית אפשר להסביר את הרעיון של השתנות ישרה כבר בהתחלה:

הגדרה: הפונקציה f היא בעלת השתנות ישרה אם:

$$f(kx) = kf(x) \quad \text{לכל } k \text{ ו- } x \text{ ממשיים} \tag{3}$$

לאחר שהתלמיד יבחן הגדרה זו ויבין אותה באמצעות דוגמאות, ניתן לקבל את הנוסחה המקובלת כתוצאה. יהי $f(1) = m$ נקבל: $f(x) = f(x\cdot 1) = xf(1) = mx$

עתה, ניתן לקבל בדרך המקובלת את התוצאות הרגילות של השתנות ישרה, כגון: $f(x_2)/f(x_1) = (mx_2)/(mx_1) = x_2/x_1$ במעט מאמץ ניתן להשיגן ישירות מ- (3).

השתנות הפוכה

הרעיון של השתנות הפוכה הוא שכאשר מוכפל אחד המשתנים בגורם כלשהו, השני מחולק באותו הגורם. לכן, השתנות הפוכה מוגדרת על-ידי המשוואה הפונקציונלית $f(kx) = f(x)/k$.

ההגדרה המקובלת מושגת עתה בעזרת הפיתוח הפשוט:

$$f(x) = f(x\cdot 1) = f(1)/x = m/x$$

השתנויות אחרות

כל הסוגים הרגילים של השתנות ניתנים ללימוד על-ידי משוואות פונקציונליות. למשל, השתנות הפוכה בריבוע מקיימת: $f(kx) = f(x)/k^2$, והשתנות משותפת מקיימת:

$$f(px, qy) = pq\, f(x,y)$$

לינאריות

גם כאן הגישה המקובלת היא להתחיל בפונקציות המוגדרות על-ידי נוסחאות, במקרה זה נוסחאות מן הצורה: $f(x) = mx + b$. לנוסחאות אלו ניתן מיד הכינוי משוואות לינאריות. כמובן, התלמידים מגלים שהגרפים של פונקציות אלו הם ישרים או במלים אחרות שהן גדלות בקצבים קבועים. תוצאה זו מוכחת, קרוב לודאי, בכך שמראים שהיחס הבא הוא קבוע.

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \tag{4}$$

גישה אלטרנטיבית עשויה להתחיל במקרים מיוחדים של גידול קבוע המוצגים בעזרת משוואות פונקציונליות. לדוגמא, אם f מקיים:

$$f(x + 1) = f(x) + 3 \tag{5}$$

הרי תמיד כאשר הקלט (המשתנה הבלתי תלוי) גדל ב-1, הפלט (המשתנה התלוי) גדל ב- 3.
בהמשך אפשר לבחון משוואות כמו:

$f(x+h) = f(x) + 3h$, $f(x+1) = f(x) + k$, אחר כך את המשוואה (4), ורק לבסוף לקשור כל זאת בנוסחה: $f(x) = mx + b$.

סימטריה

בעזרת ציור תמונות יכול התלמיד להיווכח כי: $f(-x) = f(x)$ הוא תנאי הכרחי ומספיק לכך שהגרף של f יהיה סימטרי ביחס לציר ה- y. באופן דומה, הגרף של f הוא סימטרי נקודתית ביחס לראשית אם $f(-x) = -f(x)$. גם לסימטריות ביחס לקוים אחרים וביחס לנקודות אחרות יש משוואות פונקציונליות.

סדרות

הסדרות החשבוניות עם הפרש 3 אינן אלא אותן הפונקציות, המוגדרות על השלמים, המקיימות את המשוואה (5). כך, כל הסדרות הגיאומטריות עם מנה 3 מקיימות: $f(x+1) = 3f(x)$.
שתי המשוואות הפונקציונליות הללו הן רקורסיביות כלומר, $f(x+1)$ מבוטא במונחים של ערכים קודמים. אפשר להגדיר את כל הסדרות החשבוניות והגיאומטריות וכן גם סדרות רבות אחרות, בעזרת משוואות פונקציונליות רקורסיביות. לדוגמא, סדרת פיבונצ'י המפורסמת מוגדרת על-ידי: $f(x+1) = f(x) + f(x-1)$ עם ערכי ההתחלה $f(0) = f(1) = 1$

משוואות רקורסיביות הן כלי אידיאלי לחקירת סדרות במחשב.

שימוש בכיתה

קשיים

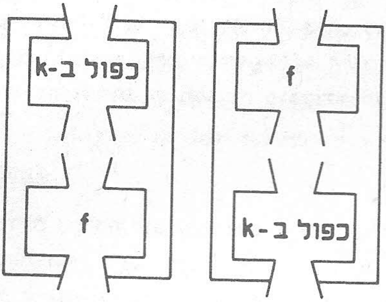
בתחילה נראות המשוואות הפונקציונליות לתלמידים מוזרות. בדרך כלל קשה לתלמידים, אשר גישה זו חדשה להם, להבין את משוואה (3) אפילו הבנה מכנית בלבד. יתכן שאף לא אחד מהם יוכל לפרשה כביטוי להשתנות ישרה. לכן, הקושי הראשון הוא קושי של קריאה.

דרך אחת להסביר משוואות כמו (3) היא לנתח פונקציות ומספרים ספציפיים אשר חלקם מקיימים אותה וחלקם לא. למרות שדרך זו עשויה תמיד לעזור, נציג לפניכם גישות אחרות אשר אולי תוקפות את הבעיה בצורה ישירה יותר.

התלמידים נתקלים בקשיים כאשר לפונקציה יש ארגומנט מורכב. אם $f(x) = x^2$, איך הם יודעים מה להעלות בריבוע כשהם רואים $f(x+1)$. המורה חייב להדגיש שתמיד יש לטפל בכל הארגומנט כיחידה אחת. כשכותבים $f(x) = x^2$, נהוג לקרוא זאת: "f של x שווה ל- x בריבוע" לרוע המזל משפט זה מדגיש את האות הבודדת x ולא את התהליך. מוטב לומר: "f לוקחת כל שתתן לה ומעלה אותו בריבוע". כדאי, כמו כן, בלימוד האלגברה להשתמש בכמה סמלים מיוחדים, כגון: Δ ו- $\square$, לסימול ביטויים מסובכים המכילים את המשתנים הרגילים. בשיטה זו ניתן להתחיל בכתיבת: $f(\Delta) = \Delta^2$. לאחר מכן, $f(x+1) = (x+1)^2$ יראה יותר טבעי.

ברגע שארגומנטים מורכבים חדלים מלהיות מכשול, כדאי להורות לתלמידים לבודד מתוך המשוואות הפונקציונליות את הביטויים המיצגים קלטים לפונקציה ואת הביטויים המיצגים פלטים. לדוגמא, הקלט באגף הימני של (3) הוא x, בעוד שהקלט באגף השמאלי הוא kx. כמו כן, הפלט של f באגף הימני הוא f(x) ובאגף השמאלי הוא f(kx). ברגע שהתלמיד ילמד לחפש דברים אלו, יקל עליו להבין שהפלט הנוצר מ- kx שווה ל- k פעמים הפלט מ-x.

לבסוף, תיבות פונקציה (מכונות קלט-פלט) מספקות אמצעי חזותי לפיתוח הבנה. לדוגמא, המשוואה (3) אומרת ששתי המכונות המורכבות אשר בציור 1 מבצעות את אותו הדבר.



ציור 1

כאשר מגיע התלמיד לנקודה בה הוא יכול להתבונן ב- (3) ולומר "כאשר הקלט מוכפל ב- k גם הפלט מוכפל ב- k", ניתן לומר בבטחון שהוא מבין את המשואה.

עתה הגיע הזמן להתמודד עם קושי אחר. למרות שהתלמידים מסוגלים לעקוב בקלות אחרי פיתוחים כמו זה של f(x) = mx מן המשואה (3), הם מתקשים לעשותם בעצמם. רוב הבעיות המוכרות להם באלגברה ניתנות לפתירה בצורה מכנית. הפיתוחים הללו, לעומת זאת, כמו בעיות בגיאומטריה, דורשים מיומנות. לכן חשוב שהתרגילים יוכנו בזהירות רבה. יש להעלות את רמת הקושי של התרגילים באיטיות ולתת הזדמנויות רבות לחזרה על הטכניקות השונות לפתרון. כמו כן, אין חובה להתחיל בפיתוחים דוקא. כאשר נתונה משואה פונקציונלית, התלמידים עשויים לשאוב הנאה רבה ממציאת פונקציות המקיימות אותה בשיטת "נסיון ושגיאה". אם המורה מוצא דוגמאות כמו (5), התלמידים מתמחים די מהר במציאת פתרונות בדרך של ניחוש. ואז, כאשר בידם ניחוש, ישנה דרך מכנית לבחון אותו. יש להציב את הפתרון בדיוק כשם שמציבים פתרון מוצע למשתנה מספרי. לדוגמא, הנה הוכחה ש- f(x) = 3x + b מקיימת את (5):

$$\begin{array}{c|c} f(x)+3 & f(x+1) \\ (3x+b)+3 & 3(x+1)+b \end{array} \qquad (6)$$
$$3x+3+b = 3x+b+3$$

סדרת בעיות

להלן, בשינויים קלים, חלקים נבחרים מסדרת תרגילים אותה ניסה המחבר בכיתה בעלת יכולת טובה, בסתיו 1972. בבית הספר בו בוצע הניסוי נלמדו אלגברה וגיאומטריה במשותף. בתקופה בה הועברו תרגילים אלו עמדו התלמידים בתחילת הלימוד של הרחבת ההעלאה בחזקה מן המספרים הטבעיים למספרים הרציונליים. למרות שכבר ראו ביטויים כמו 2^n, הם טרם למדו פונקציות מעריכיות, ולא שמעו על לוגריתמים. מאידך היה להם נסיון בקריאת משואות פונקציונליות וכבר הוכיחו הוכחות כדוגמת (6).

I. התבונן במשואה:

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \qquad (1)$$

1. הסבר את משמעותה של (1).

2. מצא לפחות פונקציה אחת אשר לדעתך מקיימת את (1) והוכח את טענתך.

הראה שכל פונקציה המקיימת את (1) גם מקיימת את:

3. $f(0) = 0$. רמז: יהי $a = 0$ ב- (1)

4. $f(-a) = -f(a)$. רמז: יהי $b = -a$

5. $f(a-b) = f(a) - f(b)$

6. $f(2) = 2f(1)$; $f(3) = 3f(1)$

7. $f(2x) = 2f(x)$;$f(3x) = 3f(x)$;$f(4x) = 4f(x)$

8. $f(nx) = nf(x)$ לכל n טבעי.

9. $f(-2x) = -2f(x)$; $f(-3x) = -3f(x)$

10. $f(nx) = nf(x)$ לכל n שלם ושלילי.

11. $f(x/2) = f(x)/2$; $f(x/3) = f(x)/3$

12. $f(x/n) = f(x)/n$ לכל n טבעי.

13. $f(rx) = rf(x)$ לכל r רציונאלי.

רמז: $r = {}^{p}/_{q}$ כאשר p ו- q שלמים ו- q חיובי.

[הסתמך על (8) ועל (10)]

14. $f(a+b+c) = f(a) + f(b) + f(c)$

15. $f(2a+b-c) = 2f(a) + f(b) - f(c)$

16. נניח כי: $f(3) = 5$ עבור איזה x יהיה $f(x) = 15$?

עבור איזה x יהיה $f(x) = -1$?

17. נניח שלפונקציה f יש פונקציה הפוכה.

הראה כי f^{-1} מקיימת את (1).

II. התבונן במשואה:

$$f(ab) = f(a)\cdot f(b) \qquad (2)$$

הראה שכל פונקציה השונה מ $f(x) = 0$ אשר מקיימת את (2) מקיימת גם את:

3. $f(1) = 1$. רמז: יהי $a = 1$

4. $f(^1/a) = 1/f(a)$. רמז: יהי $b = {}^1/a$

5. $f(a/b) = f(a)/f(b)$

6. $f(9) = [f(3)]^2 \; ; \; f(27) = [f(3)]^3$

9. $f(1/x^2) = 1/[f(x)]^2 \; ; \; f(1/x^3) = 1/[f(x)]^3$

11. $f(\sqrt{x}) = \sqrt{f(x)} \; ; \; f(\sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{f(x)}$

17. נניח שלפונקציה f יש פונקציה הפוכה.
הראה כי גם f^{-1} מקיימת את (2).

III. התבונן במשואה:

$$f(a+b) = f(a)\cdot f(b) \qquad (3)$$

הראה שכל פונקציה המקיימת את (3) ואשר שונה מהפונקציה $f(x) = 0$ מקיימת גם את:

3. $f(0) = 1$

4. $f(-a) = 1/f(a)$

5. $f(a-b) = f(a)/f(b)$

8. $f(nx) = [f(x)]^n$ לכל n טבעי.

11. $f(x/2) = \sqrt{f(x)} \; ; \; f(x/3) = \sqrt[3]{f(x)}$

17. אם ל- f יש פונקציה הפוכה, האם היא מקיימת את (3) ?
האם היא מקיימת משואות פונקציונליות אחרות?

IV. התבונן במשואה:

$$f(ab) = f(a) + f(b) \qquad (4)$$

הראה שכל פונקציה המקיימת את (4) מקיימת גם את:

3. $f(1) = 0$

4. $f(1/a) = -f(a)$

8. $f(x^n) = nf(x)$ לכל n טבעי.

12. $f(\sqrt[n]{x}) = f(x)/n$ לכל n טבעי.

15. $f(a^2b/c) = 2f(a) + f(b) - f(c)$

16. נניח כי $f(10) = 1$ מצא x עבורו

$$f(x) = 1/2 \quad ; f(x) = -2 \quad ; f(x) = 3 \quad ; f(x) = 2$$

17. נניח כי ל- f יש פונקציה הפוכה.
איזו משואה פונקציונלית מקיימת הפונקציה f^{-1}?

שמת לב בודאי כי לכל k טבעי קיים קשר בין הבעיות k.I , k.II , k.III ו- k.IV בכל רביעיה כזו מופיע לעיתים מבנה של חיבור (-, +, 0) ולעיתים מבנה של כפל (:, ×, 1). כצפוי החלו התלמידים לחוש במהרה בדמיון שבין שני המבנים. ברגע שהם הבינו כיצד אפשר להגיע לטענות שבבעיות האחרונות על-ידי שיבוי מסויים בניסוח הטענות הראשונות, הם היו מסוגלים להוכיח את הבעיות הללו על-ידי שיבוי דומה בהוכחות הראשונות. לכן חלקים (IV-II) היוו חיזוק לטכניקות ההוכחה שהוצגו ב- I .

לכל הבעיות שלעיל הוכחות קצרות. לדוגמא, בעיה 4.I:

נתון	$f(a+b) = f(a) + f(b)$
הצבה	$f[a+(-a)] = f(a) + f(-a)$
פשוט	$f(0) = f(a) + f(-a)$
3.I	$0 = f(a) + f(-a)$

ומכאן: $-f(a) = f(-a)$

אבל, כצפוי, בתחילה נתקלו התלמידים בקשיים, החלפת משתנים בקבועים או במשתנים אחרים, כטכניקת הוכחה, היתה חדשה לגמרי בשבילם. חלף זמן עד שיכלו להתבונן במסקנה המבוקשת ולהחליט על החלפה הגיונית שאתה אפשר להתחיל.

אפילו כאשר בחרו באופן נבון, לפעמים התקשו לראות באילו צעדים אלגבריים פשוטים יש לנקוט הלאה. כפי שקורה בגיאומטריה, לעיתים קרובות לא ידעו להשתמש בתוצאות שהוכחו קודם לכן. קרה גם שתלמיד יצא מהמסקנה המבוקשת, הגיע ממנה לנתון וחשב שבכך יצא הפתרון! המשואות (I) - (IV) מתקיימות על-ידי: $f(x) = ax$, x^a, a^x, $\log_a x$ בהתאמה. טבעי לשאול אם ישנם פתרונות אחרים. באשר ל- (I) נשאלה שאלה זו לפני זמן רב ונמצאה לה תשובה חלקית על-ידי המתמטיקאי המפורסם קושי (Cauchy, 1789-1857). הוא הראה תחילה שכל פתרון ל- (I) חייב לקיים את $f(x) = ax$ עבור ערכי x רציונליים. (יהי $x = 1$ ב- 13.I). אחר כך הוא הבחין שאם f רציפה, למעשה אם היא רציפה אפילו רק בנקודה אחת, אזי $f(x) = ax$ גם עבור ערכי x אי רציונליים.

בדרך השלילה ניתן לסכם את תוצאתו של קושי כך: אם פונקציה רציפה אינה בעלת השתנות ישרה, היא אינה מקיימת את (I). בכך נגזר דינן של כמה "הפשטות" החביבות על התלמידים:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \qquad \sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

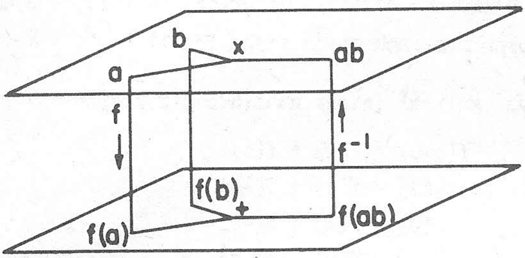
$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \qquad \sin(a+b) = \sin(a) + \sin(b)$$

אשר אינן נכונות כמובן. בתחילת המאה הנוכחית הוכח שישנן פונקציות אחרות, אשר אינן רציפות בשום מקום, המהוות פתרונות לכל אחת מן המשואות I-IV .

תוצאות

היו מספר סיבות לניסוי סדרת הבעיות שלעיל. ראשית, ניתנה לתלמידים הזדמנות לפתח כשרונות הוכחה באלגברה ולהעריך את העובדה שאפשר ללמוד רבות על פונקציה מבלי להזדקק לנוסחה עבורה. שנית, הטיפול במשוואות פונקציונליות עשוי היה לחזק את החומר על חזקות רציונליות אשר נלמד באותה עת בכיתה. לדוגמא, 4.III הוכח ימים מספר לאחר שנקבע ש- x^{-n} משמעותו $1/x^n$. הכיתה שמה לב לכך שבשני המקרים נעשה שימוש בנימוקים דומים מאוד. שלישית, היתה תקוה שחלק IV יהווה קרש קפיצה ללימוד לוגריתמים.

נראה היה שסדרת התרגילים הצליחה. כעדות לכך רוצה המחבר להתייחס למאורע שהתרחש בכיתה כיום או יומיים לאחר שהושלמה סדרת התרגילים. יתכן והציטוטים אינם מדויקים אך הם מיצגים בנאמנות את רוח הדברים שנאמרו.
הכיתה זכרה שמצאנו פתרונות ל- (II) ול- (III) אך לא ל- (IV).



ציור 2

"נניח שיום אחד נמצא פונקציה אשר תקיים את (IV); האם יהיה לה שימוש כלשהו?" שאלתי. לא היתה תשובה מן הכיתה. "ואם נניח של- f ישנה פונקציה הפוכה?" אין תשובה. שרטטתי על הלוח את ציור 2.

התייחסתי למישור העליון כאל פני הקרקע ולתחתון כאל הרכבת התחתית. "האם רואים אתם שימוש ל- f עתה?" אין תשובה. "איך אפשר להגיע מ- a ו- b ל- ab?" לבסוף קיבלתי את התשובה: "אפשר ללכת ישירות ואפשר לרדת למטרה דרך התחתית ואז לעלות בחזרה".
"בסדר, ועתה נניח ש- a = 3.7298 וש- b = 519.62?"
"תפשתי" אמר אחד התלמידים "הדרך ברכבת התחתית קצרה יותר".
"רק רגע, זה לא יתכן!" חשבתי בנסיון להרתיעו. "ברור שזוהי הדרך הארוכה".
"אבל למעלה יש פקק תנועה" השיב התלמיד.
חיכיתי מעט ושאלתי "מה גורם לכך?"
"הכפלי".
"ובכן, יתכן שיש פקק גם ברכבת התחתית; f(a) ו- f(b) עלולים להיות מספרים עשרוניים מכוערים גם כן".
"אבל חיבור עדיין קל יותר" הוסיף תלמיד אחר.
היה רגע של שתיקה ואז שאל תלמיד שלישי:
"האם קיימת פונקציה כזאת?"
"התבוננו בטבלאות שבעמוד 606 בספר האלגברה שלכם", עניתי.

אז התחלנו לעסוק בחישובים המסורתיים בלוגריתמים. במבט לאחור, אני מאמין שכיתה זו הצליחה בחישובים אלו יותר מכיתות אחרות בעלות יכולת דומה.

מסקנות

ניתן להשתמש ביעילות במשוואות פונקציונליות במסגרת תוכנית הלימודים של בית הספר התיכון. ברגע שהתלמידים יודעים כיצד לפרש משוואות כאלו, אפשר לגשת לנושאים רבים בדרכים חדשות אשר יתכן והן בהירות יותר. השימוש במשוואות מציג נקודת השקפה ושיטות הוכחה המופיעות לעיתים קרובות בלימודים מתקדמים יותר. נושאים אחדים הנוחים לגישה בשיטה זו הם השתנות, ליניאריות, סימטריה, סדרות, חזקות ולוגריתמים.