דיון בהוראת הגיאומטריה האוקלידית בגישה הדדוקטיבית בבית הספר

נערך על ידי נירה חטיבה, ביה"ס תיכון חדש תל-אביב.

בעיית תכנית ההוראה בגיאומטריה שנויה במחלוקת הן אצל המתמטיקאים אנשי האוניברסיטאות והן בקרב המורים למתמטיקה. ויכוחים וניסויים בנושא זה נמשכים כבר עשרות שנים במרבית הארצות המפותחות ובכללן בארץ, מבלי שתתקבל דעה מוסכמת.

- יש הטוענים כי "אוקלידס עשה את שלו - אוקלידס חייב ללכת" - יש לבטל לחלוטין את הוראת הגיאומטריה בבית הספר, ולהחליפה בנושא אחר.
- יש הטוענים כי יש להשאיר את תכנית הלימודים בגיאומטריה כפי שהיא.
- ויש הסבורים כי יש ללמד גיאומטריה אך לשנות את תכני ההוראה.

לכל אחד מהטוענים יש נימוקיו עמו.

ההבדלים בהשקפות בנושא זה, בוטאו בארץ באופן מעשי בקבלת שתי תכניות לימודים נפרדות לחטיבת הביניים השונות גם בגישתן להוראת הגיאומטריה.
"תכנית א'" שעובדה על-ידי המחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן מצמצמת את תפקידה של הגיאומטריה בהשוואה לתכנית הנהוגה עתה. חלק מהמשפטים שהוכחותיהם נלמדות לפי התכנית ה"ישנה" מושמט, חלקו האחר מובא ללא הוכחה (מעין אקסיומות) או כתרגילים. גם התירגול מצומצם מאד - אם כי בסיכומו של דבר שומרים על הגישה הדדוקטיבית.

תכנית זו מתוכננת ללימוד רק שנה אחת (כיתה ט', 2 ש"ש) אך הביצוע המעשי מעיד שכדי לסיימה יש להמשיך בלימוד עוד 1-2 שלישים בכיתה י'. לעומתה - "תכנית ב'" שגובשה על-ידי משלר וצוותו מהמחלקה להוראת המדעים באוניברסיטה העברית בירושלים, משאירה את התכנית ה"ישנה" אך מורידה אותה לכיתות ח'-ט' (כל שנה 2 ש"ש).

היות והנושא "חם" עכשיו - כאשר ועדה מיוחדת מגבשת תכניות לימודים לחטיבה העליונה, וגם בין חבריה חלוקות הדעות, אם, באיזו גישה ובאיזו רמה יש ללמד גיאומטריה, החלטנו - חברי-המערכת לפנות למספר מורים ומדענים ולבקשם לכתוב לנו את דעתם בנושא "הוראת הגיאומטריה: בעד, נגד ואולי אחרת".

כל אדם הרוצה להביע את דעתו בנושא הנדון, מוזמן לכתוב אלינו.

<u>"אחרת"</u> לימוד הגיאומטריה תוך שינוי התכנים.

מרדכי שורק (ש) ראש החוג להוראת המתמטיקה בסמינר לוינסקי ועקיבא סקידל (ס) - בית הספר האיזורי כפר בלום וסמינר "אורנים" סבורים כי צריך ללמד גיאומטריה אך לא בדרך הנהוגה כיום.

נימוקיהם:

1. אחת ממטרותיה העיקריות של הגיאומטריה היא הקניית חשיבה דדוקטיבית. אך המערכת האקסיומטית כפי שנמצאת בספרי הלימוד המקובלים היא לקויה. נסיונות לתקן אותה (בנוסח אקסיומות הילברט, למשל) מביאים יותר נזק מבחינה פדגוגית מאשר תועלת, כי לימוד בדרך אקסיומטית מדוייקת הדורשת הוכחת דברים הנראים לתלמיד המתחיל מובנים מאליהם - משעממת גם את התלמיד הטוב ודוחה אותו מהמקצוע (ס).

2. עקב הקושי של דרך חשיבה דדוקטיבית, אין מרבית התלמידים מצליחים להתמודד איתה (ש).

התלמיד הבינוני אינו מסוגל לתפוס את משמעותה אפילו של האקסיומטיקה המוגבלת והפגומה של אוקלידס כפי שהיא נלמדת כיום (ס). לפיכך הם מציעים:

א. לימוד דרך החשיבה הדדוקטיבית בצורה מדוייקת יכול להעשות בפרק אחר (לדוגמא - חוקי החזקות, השורשים והלוגריתמים) הדורש הרבה פחות זמן, ורמת קושי נמוכה יותר (ש).

ב. רצוי להוציא את הבניות הגיאומטריות (גם את הפשוטות ביותר) מתכנית החובה שכן נושא זה קשה לתלמיד וחסר כל שימוש בשרטוט מעשי. אפשר להשאירו כתכנית העשרה (בחוג מיוחד) לתלמידים טובים, ושם אפשר להרחיבו גם לבניות בסרגל בלבד ובמחוגה בלבד, בניית פעולות החשבון, פתרון משוואות אלגבריות בעזרת בניות גיאומטריות ועוד (ש, ס).

ג. לימוד העובדות והתכונות הגיאומטריות ייעשה בעיקר בצורה לא דדוקטיבית (ללא הוכחות) כפי שהגיאומטריה נלמדת בכיתות הנמוכות או בגישה דינמית (טרנספורמציות) (ש). יש להצניע את האקסיומטיקה אך יחד עם זה לקבל מספר רב יחסית של משפטים כאקסיומות (אולי מבלי לקרוא להם כך) על סמך נסיון אינטואיטיבי.

__דוגמאות:__ כל משפטי חפיפת המשולשים על סמך יחידות הבניות היסודיות, אי שוויון המשולש על פי תכונת החיתוך של שני מעגלים (סכום הרדיוסים גדול מהמרחק בין מרכזיהם). ממשפטים אלה ואחרים ניתן להסיק בעזרת שרשרות לוגיות לא ארוכות ולאו דוקא רצופות וקשורות זו בזו, את מרבית המשפטים הכלולים בתכנית המקובלת. דרך זו תאפשר גם לעמוד על תהליך ההוכחה, על הגרירה, על המשפט והמשפט ההפוך (ס).

3. אפשר והכרחי להכניס גם תכנים גיאומטריים נוספים שאינם מופיעים בתכנית המקובלת כמו: טרנספורמציות, הנדסת המרחב, ווקטורים. אין לוותר על דרכי הוכחה שונות ומגוונות ככל האפשר, כולל דרכים אלגבריות (ס).

נגד

פרופ' עזריאל אביתר מן המחלקה למתמטיקה בטכניון חיפה סבור שכדי ללמוד את תהליכי החשיבה האקסיומטיים הדדוקטיביים מספיק להתרכז בפרק מצומצם של הגיאומטריה (למשל, פרק המעגל) ולבטל את לימוד שאר הפרקים. עדיף בעיניו לבטל לחלוטין את לימוד הגיאומטריה כפי שהוא היום, ובמקום זאת ללמד תיכנות מחשבים. לדעתו - דרך נושא זה אפשר להשיג את אותן מטרות שמתכוונים להשיג על-ידי הוראת הגיאומטריה.
פרופ' אביתר סבור שאין טעם לדון "בעד" או "נגד" נושא מסויים, אלא, כאנשי מדע עלינו להגיע להחלטה בשיטה מדעית, זאת אומרת על-ידי ניסוי מתאים ומבוקר היטב.
למשל: להורות במספר כיתות גיאומטריה לפי התכנית הנוכחית, בכמה כיתות אחרות לתת קורס בתיכנות מחשבים ובקבוצה השלישית - קורס לגיאומטריה הבנוי בצורה מיוחדת כדי להורות מחשבה אקסיומטית דדוקטיבית, ולאחר זמן לבדוק את דרכי החשיבה הדדוקטיבית של שלוש הקבוצות.

הצעה אחרת - שילוב שני הנושאים: לבנות תכנית למחשב המאפשרת לטפל בצורות גיאומטריות במסגרת של בית ספר תיכון.
עבודה העוסקת בכך היא:

Rolf Peterson, Darstellung und Behandlung zweidimensionaler geometrischer Strukturen in Computer, Bonn - 1972.

בעד

מתנגד נלהב לכל הדעות הקודמות הוא פרופ' מיכאל משלר מן המחלקה להוראת המדעים באוניברסיטה בירושלים. הוא מסכם את הדעות "נגד" שהובאו לעיל, ואחרות ומגיב עליהן וכן מנמק את דעתו "בעד". והרי דבריו כלשונו:

מנחים אותי שני עקרונות כלליים, הטובים לכל נושא הוראתי:

עקרון א': כל תיקון שאנו מתקנים לטובת התלמיד הבינוני והתלמיד החלש, אסור שיפגע בתלמיד המוכשר. התלמידים המוכשרים יהיו מנהיגי האומה בשטחים רבים וחובה עלינו להביאם לכושר מקסימלי. עיקרון זה נכון בכל מדינה ועל אחת כמה וכמה במדינה קטנה, שקיומה מותנה באיכות אנשיה.

עקרון ב': עם כל דאגתנו לתלמיד המוכשר, אין לקפח את התלמיד הבינוני ואת התלמיד החלש. מדינה אינה רק קומץ מנהיגים, אלא אוכלוסיה המתפקדת ברמות חיים שונות. מדינה תהיה פוריה יותר ויוצרת יותר, ככל שהאוכלוסיה על כל שכבותיה תהיה משכילה יותר. על-כן, חובה עלינו לטפח כל תלמיד כדי מקסימום כושרו.

המסקנה מעקרונות אלה, היא, כי הרצון לחתור להישגים אחידים בכיתות הוא פסול. להיפך - עלינו להביא כל תלמיד למקסימום ידע, שהוא מסוגל אליו ולפתח את כשרונותיו במידה מירבית. הוראה כזו תביא לפערים רבים בכיתה ותקשה על עבודתו של המורה.

לאור העקרונות דלעיל, הגיאומטריה הדדוקטיבית היא מקצוע אידיאלי להוראה. היא מציבה אתגרים לתלמיד החזק ויש בה גם מספיק בעיות קלות שיכולות לשמש אתגר לתלמיד הבינוני והחלש. במקצוע זה מתגלים ומתעצבים הכשרונות המתמטיים של התלמיד וכאן באים רבים לאהוב מתמטיקה. אין בכל לימודי המתמטיקה של חטיבת הביניים נושא המפתח את הכשרים המתמטיים בדרך טובה יותר, כי בשלב זה לימודי האלגברה הם טכניים בעיקרם. הוראת הגיאומטריה מביאה את הכיתה לבגרות מתמטית ומעלה את רמת הכיתה, במידה שאינה מושגת על-ידי הוראת האלגברה בלבד. עובדה היא, כי בדרך כלל כיתות הלומדות גיאומטריה משיגות יותר גם בלימודי האלגברה למרות העובדה, שהן מקדישות פחות שעות ללימודים אלה.

אני מדגיש כאן את לימודי המתמטיקה <u>בחטיבת הביניים</u> כי למיטב נסיוני ונסיון הרבה מורים, התקופה הטובה להוראת הגיאומטריה האוקלידית היא בכיתות ח'-ט' (2 ש"ש) ואולי אף התחלה בכיתה ז'. הרבה סיבות לכך, ולא אביאם כאן.

ואולם הוראת הגיאומטריה חשובה לא רק משום שהיא מפתחת את כושרו של התלמיד. הגיאומטריה הדדוקטיבית חשובה גם כמקצוע בפני עצמו. זה המקצוע היחיד בבית הספר שבו נדרש התלמיד להוכיח משפטים לא טריביאליים בקביעות. מרביתם משפטים יפים ומפתיעים. כל מתמטיקאי יודע, כי אין מתמטיקה ללא הוכחות. שום תגלית מתמטית לא תפורסם בטרם תוכח כראוי. ההוכחה היא במהותה של המתמטיקה. משום כך, מי שמלמד "מתמטיקה ללא הוכחות", מלמד, לאמיתו של דבר, קצת טכניקה חישובית וקצת טרמינולוגיה ואולי גם כמה עובדות, אך בשום פנים לא מתמטיקה. אפשר לטעון כי אפשר ללמד הוכחות גם בשיעורי האלגברה, אולם, פרט להוכחות האינדוקציה עד כה הצליחו להוכיח לתלמידים רק משפטים טריביאליים, כגון $a \cdot 0 = 0$ לכל a וגם זאת רק בכיתות הגבוהות ורק לתלמידים מוכשרים.

לגיאומטריה הדדוקטיבית כמקצוע יש גם מעלה נוספת: זה המקצוע היחיד בבית הספר, פרט לכתיבת חיבורים, שבו נדרש התלמיד ליצור. במילה "יצירה" אני מגדיר את היכולת להגיע למסקנות, אשר המורה לא לימד. תלמיד טוב יכול לגלות קווי עזר מסובכים ותלמיד בינוני יכול למצוא משולשים חופפים וכל זאת בעקביות - שעור אחר שעור. מדברים הרבה על הוראה בדרך הגילוי בבית הספר גם במקצועות אחרים, אולם לא נתקלתי בתכנית לימודים שעורכים בה, למשל, ניסויים שמהם נדרשים התלמידים לגלות בעצמם את חוקי ניוטון או חוקי גנטיקה. הלואי ונגיע לכך. אולם בגיאומטריה הגילוי הוא במהותה של ההוראה. מכאן חשיבותה ומכאן גם קשיי ההוראה שעלינו לקבל באהבה, כי פיתוח כושר האמצאה (אמצאה בינונית אצל תלמיד חלש ומעמיקה אצל החזק) הוא ערך עליון.

אגב לימוד הגיאומטריה רוכש התלמיד ידע מעמיק על תכונותיהן של צורות מישוריות, שאי-אפשר לאדם משכיל בימינו בלעדיהן. תכונות אלה מופיעות בהרבה ענפים אחרים של המתמטיקה ושל מדעי טבע אחרים.

בדור האחרון נשמעו טענות בחוגי המתמטיקאים כנגד הוראת הגיאומטריה הדדוקטיבית, כפי שהיא מקובלת כיום. לפני שאכנס לפרטים עלי להדגיש, שלמיטב ידיעתי אין איש מדע הדורש להשמיט את לימודי הגיאומטריה או את לימוד ההוכחות. רבים נוטים לשכוח עובדה זו. מה שאנשי המדע דורשים הוא להורות גיאומטריה עם הוכחות, אך תכנים אחרים. כל הדרכים המוצעות קשות יותר מן הדרך המקובלת. שתי טענות נשמעות בפי אנשי המדע ואתייחס אליהן אחת לאחת.

<u>טענה ראשונה:</u> יש לחדול מהוראת הגיאומטריה בהוכחות סינטטיות, משום שהוכחות אלה אינן מדוייקות (אין מתחילים מאקסיומות, מסתמכים על ציורים). לדעתם יש להורות גיאומטריה באמצעות הוכחות המסתמכות על אלגברה לינארית.

אינני מקבל את טענת הפגם בשל חוסר דיוק. לפי הגיון זה אסור ללמד גם חשבון ואלגברה שהרי גם כאן אין השיקולים המובאים בבית הספר מדוייקים. אם מותר "להתרשל" בהיסקים אלגבריים מדוע אסור הדבר בגיאומטריה? לו לפחות אפשר היה ללמד גיאומטריה דרך אלגברה לינארית בכיתות חטיבות הביניים - ניחה; אולם לכך אין סיכוי. אלגברה לינארית עם גיאומטריה היא לכל המוקדם עניין לכיתות יא'-יב', ואף זאת רק בכיתות מצטיינות במיוחד. אני מחייב מאוד הוראת אלגברה לינארית בכיתות הגבוהות, אולם אין לזאת כל שייכות עם חובתנו ללמד את התלמיד פרקי מתמטיקה (להבדיל מטכניקה) גם בחטיבת הביניים, והגיאומטריה בשלב זה היא המקצוע היחיד שבו ניתן הדבר.

<u>טענה שניה:</u> יש ללמד גיאומטריה אוקלידית בתוספת תכנים נוספים. הצעה אחת: להתחיל מאקסיומות. הצעה שניה: לבסס את ההוכחות על טרנספורמציות. לפי ההצעה הראשונה מסלקים את האלמנט של חוסר דיוק ולומדים להכיר מערכת אקסיומטית. לפי ההצעה השניה לומדים להכיר תכונות של מישור כמישור ולא רק תכונות של צורות מיוחדות במישור.

הוראה לפי אקסיומות נוסתה וכל הדיווחים מצביעים על כישלון טוטלי, אם משום הקושי ללמד תלמידים בינוניים את החומר או בגלל השעמום שהלימוד האקסיומטי משרה אצל התלמידים הטובים. (אגב, הוראת המשמעות של מערכת אקסיומטית אפשרית וקלה יותר, כשהיא מבוצעת בכיתות הגבוהות ולאו דוקא דרך פרקי הגיאומטריה האוקלידית).

גם הדיווחים על הוראת טרנספורמציות כולם שליליים. נראה, שההוכחות בדרך הטרנספורמציות קשות יותר, אין די תרגילים בדרגת קושי בינונית והמאמץ הדרוש כדי להגיע למשפטים מעניינים רב מאד. עם זאת, מוקדם אולי להתייאש מדרך זו. יתכן שהפתרון הנכון - שמעתיו משמשון עמיצור - הוא שילוב של הוכחות קלסיות עם הוכחות סינטטיות תוך התקדמות הדרגתית בשני סוגי ההוכחות. אם אי-פעם ייכתב טקסט מלא, ינוסה בכמה כיתות, יעובד

וישופר ויועשר בהרבה תרגילים, אולי נגיע לכך, שתכני ההוראה בגיאומטריה ישתנו. עד אז אסור שנהרוס את הקיים.

הטענה החזקה ביותר כנגד הוראת הגיאומטריה הדדוקטיבית, ולדעתי הטענה היחידה המוצדקת, מושמעת דוקא בפני מורים: הם טוענים, כי יש להפסיק ללמד גיאומטריה אוקלידית, משום שהרבה תלמידים נכשלים בה. לפי עיקרון ב' לעיל, יש לשקול את הנזק הנגרם לתלמיד שאינו מתגבר על הנדרש, נכנס לתסכול ולשנאת המקצוע, ואולי להגיע למסקנה, שנזק זה אינו שווה בתועלת שבעצם הלימוד. הטענה מוצדקת ומשכנעת. המסקנה - לא! המסקנה צריכה להיות שונה לחלוטין והיא קשורה קשר הדוק עם הגדרת המושג "כישלון". אם אמנם תפקיד ההוראה הוא להביא כל תלמיד לרמה המקסימלית שהתלמיד מסוגל להגיע אליה (ובענין זה יסכימו אתי הרבה מורים), כי אז עלינו לראות כהצלחה ולא ככישלון תלמיד חלש, שבזכות מאמציו מסוגל להוכיח משפטים פשוטים, תלמיד כזה זכאי לשבחים ולציון גבוה, אפילו הישגיו, בהשוואה לתלמיד מוכשר, נמוכים מאוד. אם אנו לא נראה תלמיד כזה ככישלון, אף הוא לא יראה עצמו כך, לא יתוסכל וישפר את הישגיו.

לעומת זאת, תלמיד מוכשר, שהתרשל ומסוגל להוכיח רק משפטים שיש בהם מעט שלבים, טוב אם ניתן לו ציון נמוך, כי לא ניצל את הפוטנציאל שלו באופן מקסימלי; זאת על אף העובדה ששאר התלמידים בכיתתו הגיעו להישגים אבסולוטיים נמוכים יותר.

בהוראה טובה עלינו לדרוש הרבה מן התלמיד החזק ומעט מן התלמיד החלש. עלינו לעודד את החלש בכך שאנו משבחים כל הישג שהשיג, ואפילו זעיר, ומעלימים ממנו כשלונות הנובעים מחוסר פוטנציאל (להבדיל מכשלונות הנובעים מחוסר מאמץ). הפגם בהוראה כיום איננו בעצם העובדה שאנו מלמדים הנדסה אוקלידית, אלא בכך שאנו נותנים ציונים לפי הישגים אבסולוטיים במקום הישגים יחסיים. אנו מודדים הישגי תלמיד א' לפי הישגי תלמיד ב', בעוד שעלינו למדוד את הישגי תלמיד א' לפי הפוטנציאל של תלמיד א' ובהתאם לכך לתת לו ציון. האבסורד איננו בכך שאנו מלמדים גיאומטריה, אלא בעובדה שאנו בוחנים אותה בבחינות בגרות (אובייקטיבית) דוקא את התלמידים ההומניסטיים.

נשמעת עוד טענה בחוגי מורים והיא, כי התלמיד החלש, אשר לא ימשיך בלימודים עיוניים איננו זקוק להנדסה אוקלידית, אלא לידע פרקטי יותר על תכונותיהן של צורות מישוריות (ומרחביות). ידע זה יוכל לרכוש בנקל בלימודיו בבית הספר (ואמנם תכניות הלימודים לבתי ספר המקצועיים מכילים נושאים אלה בשפע). ואולם חולק אני על כך שידע תיאורטי אינו דרוש לתלמיד שיעודו אינו אקדמי - להיפך. בלי ידע תיאורטי יוכל לכל היותר ללמוד בעל-פה מספר נוסחאות שהמורה מלמדו. עם ידע תיאורטי יוכל לפתח לעצמו נוסחאות נוספות, כפי שתידרשנה לו מפעם לפעם. רהיטים, כלים ומכשירים אינם עשויים רק מקבילים ומעגלים הנלמדים בבתי הספר, יש בהם חלקים בצורות מורכבות, ספציפיות לכל מוצר. בעל מקצוע טוב חייב לדעת להתמודד עם המתמטיקה הקשורה לצורות אלה, גם אם לא נלמדה בבית הספר לשם כך עליו לפתח כושר יצירתי ולרכוש ידע תיאורטי.

עוד טענה אחת בשמעת והיא, כי אמנם הערכים שמקנה ההנדסה האוקלידית חשובים, אך מוקדש להוראה זמן רב מדי. הטוענים כך מציעים ללמד פחות משפטים ולתרגל פחות. עלי לקבוע קטגורית כי זוהי אשליה. התכנית הסטנדרטית מכילה כ-30 משפטים ברובם פשוטים. לא אלה גוזלים את זמן ההוראה, זמן ההוראה הממושך דרוש כדי להביא את התלמיד להכרת הצורך בהוכחה, להבנת הוכחות וליכולת להוכיח בעצמו אפילו משפטים פשוטים. לשם כך דרושות שנתיים (שעתיים בשבוע) בכיתה רגילה, בין אם תכיל התכנית 20 משפטים או 30 משפטים. לאור הנסיון שנרכש עד כה אצל המורים המלמדים קורס גיאומטריה מצומצם בחטיבת הביניים, נראה, שכיום כולם חייבים לאשר קביעה זו.

המענה הנכון לטענת אריכות הזמן הנדרש להוראת הגיאומטריה הוא שיש להורותה בתקופה שבה ממילא חסר הוא כלים להתקדמות מהירה בפרקי מתמטיקה אחרים, דהיינו בכיתות ח'-ט' (ואולי אף ב-ז') ולא בתקופה מאוחרת יותר. בכיתה ח' מוכן התלמיד לשחק בהוכחות והתקדמותו בלימוד אינה נבלמת בשל השאלה המתסכלת "מדוע צריכים להוכיח". הלימוד מקדם מאד את הכיתה הן בגיאומטריה והן באלגברה ועל כך מעידים מורים רבים שהתנסו בכך.