פתרון הבעיות ב"שבבים" מס' 3 נערך על־ידי י. גיליס

1. נתון כי המספר $781\cdot965 = 753y65$ מצא את y בלי לבצע את הכפל.

<u>פתרון</u>

היות ו 781 מתחלק ב-11, הרי גם $753y65$ חייב להתחלק באותו גורם.
אבל 753753 מתחלק ב-11 (בדוק!) לכן גם $y65-753$, כלומר $100(y-7)+12$ מתחלק ב 11. ברור כי $99(y-7)$ מתחלק ב 11 ולכן גם
$[100(y-7)+12]-99(y-7)$ בטוי זה שווה ל $y+5$, הוא מתחלק ב 11 ולכן
$y = 6$.

2. מהן שתי הספרות האחרונות של 3^{999}?

<u>פתרון</u>

קל להווכח כי

$$
\begin{aligned}
3^4 &= 81\\
3^8 &\equiv 61 \pmod{100}\\
3^9 &\equiv 83 \pmod{100}\\
3^{10} &\equiv 49 \pmod{100}\\
3^{12} &\equiv 41 \pmod{100}\\
3^{16} &\equiv 21 \pmod{100}\\
3^{20} &\equiv 1 \pmod{100}
\end{aligned}
$$

לכן:

$$3^{980} = (3^{20})^{49} \equiv 1 \pmod{100}$$

ומכאן:

$$
\begin{aligned}
3^{999} &\equiv 3^{19} \pmod{100}\\
&\equiv 83\cdot49 \pmod{100}\\
&\equiv 67 \pmod{100}
\end{aligned}
$$

לכן שתי הספרות האחרונות של 3^{999} הן 67.

3. נתון כי $a + b + c = 0$ חשב את $\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)$

<u>פתרון</u>

$$\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c} = \frac{1}{abc}\left[bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)\right]$$

$$= -\frac{1}{abc}(b-c)(c-a)(a-b)$$

(בדוקו!)

מאידך

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = \frac{1}{(b-c)(c-a)(a-b)}\left[a(c-a)(a-b) + b(a-b)(b-c) + c(b-c)(c-a)\right]$$

אבל

$$b(a-b)(b-c) + c(b-c)(c-a) = (b-c)\left[b(a-b) + c(c-a)\right]$$

$$= (b-c)\left[a(b-c) - (b^2-c^2)\right]$$

$$= (b-c)^2(a-b-c)$$

$$= 2a(b-c)^2$$

כי $b + c = -a$

מאותה סיבה

$$(c-a)(a-b) = ab + ca - bc - a^2$$

$$= a(b+c-a) - bc$$

$$= -2a^2 - bc$$

ולכן

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = \frac{1}{(b-c)(c-a)(a-b)}\left[2a(b-c)^2 - a(2a^2 + bc)\right]$$

$$= \frac{1}{(b-c)(c-a)(a-b)}\left\{2a\left[(b-c)^2 - a^2\right] - abc\right\}$$

$$= \frac{1}{(b-c)(c-a)(a-b)}\left[2a(b-c-a)(b-c+a) - abc\right]$$

אבל $$b-c-a = 2b$$

$$b-c+a = -2c$$

לכן

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = \frac{1}{(b-c)(c-a)(a-b)}\left[(2a)(2b)(-2c)-abc\right]$$

$$= -\frac{9abc}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

מכאן

$$\left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} + \frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right) = 9$$

4. מה הפגם בהוכחה כי 2=1.

<u>פתרון</u>

ברור שאין כל משמעות לביטוי $\frac{d(x^2)}{dx}$ כאן.

כי על פי ההגדרה x חייב להיות מספר טבעי.

5. האם נמצאים אנשים החיים כיום היכולים להצהיר:
"הייתי בן x שנים בשנה x^2"? ואם כן מה הערך של x ובני כמה הם כיום?

<u>פתרון</u>

נניח שאדם כזה הוא כיום בן N שנים. לכן הוא נולד ב- 1974-N
בשנת x^2, היה בן $x^2-1974+N$

מכאן? $$x^2-1974+N = x$$

כלומר $$x(x-1) = 1974-N$$

ננסה ערכים סבירים עבור x וניצור טבלה:

x	x(x-1)
43	1806
44	1892
45	1980

רואים כי $x = 43$ ו $x = 45$ הם ערכים בלתי אפשריים. ילידי 1806 כבר אינם בחיים ושנת 1980 טרם הגיעה. ידוע כי חלק מילידי שנת 1892 עדיין חיים ואלה יכולים להצהיר כי בשנת $(44)^2$ היו בני 44.