נים... ובן נים

מאת: איטה סלומון

הקדמה

נים (Nim) הוא משחק סיני עתיק שנחקר על-ידי מתמטיקאים שונים בראשית המאה. במשחק משתתפים שני שחקנים. מקובל לשחק במשחק הנים באמצעות גפרורים אך הגפרורים מהווים רק אמצעי עזר וכל עצם אחר יכול למלא את מקומם.

המשחק

כללי המשחק פשוטים בתכלית. עורמים שלוש ערימות של גפרורים כאשר בכל ערימה מספר גפרורים כרצוננו (מספר שונה מ- 0). קובעים מי פותח במשחק.
כל שחקן בתורו לוקח מספר גפרורים כרצונו (לפחות אחד) מאחת הערימות בלבד. המנצח הוא זה הלוקח את הגפרור האחרון שנותר.

אסטרטגיה ומצב מנצח

המענין במשחק הנים הוא קיום שיטה שבאמצעותה יכול שחקן המכיר אותה לגבור על יריבו.

יש ענין במשחק רק כאשר אחד השחקנים לכל היותר מכיר את השיטה. על שחקן זה לחשב חישובים שונים ולהזהר מטעות. כאשר השיטה מוכרת לשני השחקנים אפשר לדעת מראש מי יהיה המנצח מתוך המצב ההתחלתי (גודל הערימות ומי הוא השחקן הפותח) ואז אין טעם במשחק.

השיטה שבאמצעותה יכול אחד השחקנים לקבוע את צעדיו (ולהשפיע על מהלך המשחק) קרויה אסטרטגיה (strategy). כאשר האסטרטגיה מובילה לנצחון היא קרויה אסטרטגיה מנצחת (winning strategy).

לפני שתמשיך ותקרא על האסטרטגיה המנצחת - נסה לבדוק האם קיים מצב מסויים של ערימות הגפרורים (כמות מסויימת של גפרורים בכל ערימה), אשר עבורו יכול אחד השחקנים להבטיח לעצמו נצחון.
במלים אחרות, במצב זה יהיה לשחקן המנצח מהלך "תגמול" מתאים לכל צעד של היריב ופעולה זו תביא לו בהכרח את הנצחון. מצב כזה ייקרא מצב בטוח או מצב מנצח.

באופן מפורש יותר: מצב מנצח הוא מצב בו מובטח לאחד השחקנים שינצח אם לא יטעה במהלך המשחק. כלומר, במצב זה לכל מהלך של היריב ישנו מהלך "תגמול" שיחזיר אותו למצב מנצח.

ברור שמצב מנצח עבור שחקן א' הוא מצב מפסיד עבור שחקן ב', לכן כדאי לבדוק את כל המצבים ביחס לשחקן א' בלבד (לאחר ששחק בתורו).

(עבור שחקן זה מתחלקים מכלול המצבים לשניים: מצבים מנצחים ומצבים מפסידים).

נייצג את מספר הגפרורים שבערימה אחת ב- a בערימה שניה ב-b ובערימה השלישית ב- c ונסמן את מצב ערימות הגפרורים באמצעות שלשה (a,b,c). ברור כי המצב (a,b,c) שווה ערך למצב (a,c,b) שווה ערך למצב (b,a,c) וכו׳.

<u>דוגמאות למצבים מנצחים</u>

ננסה לבדוק מספר מצבים מנצחים: ברור שהמצב הסופי (0,0,0) הוא מצב מנצח. ברור גם שכאשר שתי ערימות הן ריקות כלומר (0,0,c) המצב הוא מפסיד היות ושחקן ב׳ ירוקן את הערימה השלישית. נתבונן במקרה בו a = 0. כלומר, המצב הוא (0,b,c). שחקן א׳ יבטיח לעצמו נצחון כשישאיר את שתי הערימות עם מספר שווה של גפרורים.

למשל, אם המצב לאחר תורו של שחקן א׳ הוא (0,1,1) יהיה שחקן ב׳ מוכרח לעבור למצב (0,0,1) ושחקן א׳ בהכרח ינצח. נוכל לראות שגם המצב (0,5,5) הוא מצב מנצח. שחקן ב׳ יביא למשל למצב (0,5,3), שחקן א׳ יענה ב- (0,3,3), ושוב שחקן ב׳ יביא (למשל) למצב (0,2,3), שחקן א׳ יענה ב- (0,2,2) ומכאן ההמשך ברור. שחקן א׳ יבטיח לעצמו נצחון על-ידי לקיחת מספר גפרורים מערימה אחת כמספר שלקח שחקן ב׳ מהערימה השניה. כאן תמיד יהיה זה שחקן א׳ שיקח את הגפרור האחרון. (בדוק מה יקרה כאשר שחקן ב׳ יביא למצבים: (0,5,4) או (0,5,1) או (0,5,2) או (0,5,0)).

לכן, כל מצב מהצורה (0,p,p) הוא מצב מנצח.

<u>סיכום ביניים</u>

אם נסמן ב- $\overset{א'}{\leftarrow}$ מצב שיצר שחקן א׳ (לאחר ששחק בתורו).
וב- $\overset{ב'}{\leftarrow}$ מצב שיצר שחקן ב׳ (לאחר ששחק בתורו).

נקבל: $\overset{א'}{\leftarrow}$ (0,0,0) ⇐ א׳ מנצח
$\overset{א'}{\leftarrow}$ (0,0,c) ⇐ ב׳ מנצח
$\overset{א'}{\leftarrow}$ (0,p,p) ⇐ א׳ מנצח

זכור! (a,0,0) -ו (0,b,0) שווי ערך ל- (0,0,c)
(p,0,p) -ו (p,p,0) שווי ערך ל- (0,p,p)

תהליך הבדיקה למצב מנצח מסתבך כאשר הערימות כולן אינן ריקות. כלומר $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, $c \geqslant 1$. המצבים (1,2,3) ו- (2,5,7) הם דוגמאות למצבים מנצחים. נסה לבדוק מצבים אלו וקבע אם אמנם עבור כל פעולה של שחקן ב׳ ישנה פעולה נגדית שתוביל את שחקן א׳ לנצחון. נסה למצוא דבר משותף בין כל המצבים שצינו לעיל כמנצחים.

סכום נים (Nim Sum)

נוח לתאר את האסטרטגיה המנצחת על-ידי כתיבת מספרים בשיטה הבינארית. נתוח הכללים של האסטרטגיה ייעשה בשילוב עם דוגמא. כללי האסטרטגיה המתאימה למשחק הנים הנם דלקמן:

דוגמא:

א. כתוב בשיטה הבינארית את מספר הגפרורים הנמצאים בכל אחת מהערימות. ערוך אותם זה מתחת לזה (הספרות המייצגת את 2^0 תהיינה זו תחת זו. הספרות המייצגת את 2^1 תהיינה זו תחת זו וכו').

a=24 ,b=12 ,c=29
a=11000
b= 1100
c=11101

ב. התבונן בכל אחת מהעמודות וסכם אותן באופן הבא: אם מספר היחידות בעמודה הוא זוגי - רשום 0 בשורת הסכום ואם מספר היחידות אי-זוגי רשום 1 בשורת הסכום (כלומר בכל עמודה יוצרים את הסכום מודולו 2). הסכום (המסומן ב- S) הוא מספר בינארי. הפוך את המספר הבינארי למספר עשרוני.

a 11000
b 1100
c 11101
S 1001 בינ' = 9 עשר

סכום נים הוא המספר המתקבל כתוצאה מפעולת החיבור שתוארה לעיל. סכום נים מסומן ב- S. פעולת חיבור זו מסומנת ב $+_2$.

$a +_2 b +_2 c = S$
$11000 +_2 1100 +_2 11101=1001$
$24 +_2 12 +_2 29=9$

תרגילים

1. מצא את סכום הנים עבור הערימות הבאות:
   א. a=12, b=3, c=6
   ב. a=22, b=21, c=10
   ג. a=13, b=15, c=11

   מה גילית?

2. לעיל צויין שהמצבים (1,2,3) (2,5,7) ו- (0,p,p) הם מצבים מנצחים. מצא את סכום הנים שלהם. מה גילית?

טענה (אסטרטגיה מנצחת)

המצב הוא מנצח (עבור השחקן שהביא למצב זה) אם ורק אם סכום נים הוא 0, כלומר מתקבל 0 בכל העמודות. (זכור! מצב מנצח הוא מצב בו יש לשחקן שהביא למצב זה מהלך "תגמול" עבור __כל__ מהלך של היריב).

כאשר: a=24, b=13, c=21

a 11000
b 1101
c 10101
S 00000

נסה לשחק במצב זה של ערימות (זכור! שחקן ב' מתחיל.)

הוכחת הטענה

1. ראשית נוכיח כיוון אחד: "אם סכום נים הוא 0 המצב הוא מנצח".
הוכחה:
א. כאשר סכום נים הוא 0 ועל היריב לקחת גפרורים, הוא בהכרח יביא את המשחק למצב בו סכום נים שונה מ- 0. על היריב לשנות את הייצוג הבינארי של המספר המייצג את הגפרורים שבערימה ממנה לקח. השינוי יגרום להפיכה של לפחות אחד ה-1-ים ל- 0 (מספר הגפרורים בערימה קטן). בעמודה זו ישתנה ה"סכום" מ- 0 ל-1. לכן, יתקבל סכום נים שונה מ- 0.
ב. על-ידי לקיחת מספר מתאים של גפרורים אפשר לעבור מכל מצב שסכום נים שלו שונה מ- 0 למצב שסכום נים שלו שווה ל- 0. הדרך להשגת מטרה זו תוצג למטה.
ג. אם השחקן שהביא למצב בו סכום נים 0 ישתמש בדרך המצויינת בסעיף ב׳ מובטח לו שתמיד יגיע למצבים של סכום נים 0 בשעה שיריבו יגיע תמיד למצבים בעלי סכום נים שונה מ- 0. מכיון שהמצב הסופי הוא בעל סכום נים 0 (יש 0 גפרורים בכל ערימה) יגיע אליו שחקן א׳ ולא שחקן ב׳, כלומר שחקן א׳ ינצח.

2. נוכיח את המשפט ההפוך: "אם סכום נים שונה מ-0 המצב אינו מנצח".
הוכחה:
כאשר סכום נים שונה מ-0 יכול היריב להשתמש בדרך המתאימה (המצוינת בסעיף ב׳), להביא את המשחק לסכום נים 0 ואז יוכל היריב בכל מהלך להחזיר את המשחק למצב בו סכום נים 0 ולנצח (ראה הוכחה בסעיף 1). ברור, כפי שצויין לעיל, שכל מצב מנצח עבור שחקן אחד הוא מצב מפסיד עבור השחקן השני.

<u>דרך לחישוב מספר הגפרורים שיש לקחת כדי להביא מצב שבו סכום נים איננו 0 לסכום נים שהוא 0.</u>

לצורך ההמחשה נשתמש בדוגמא שצוינה לעיל.

נניח שהערימות וסכום נים הם ביצוג בינארי.

a=24, b=12, c=29, S=9

a	11000
b	1100
c	11101
S	1001

א. מצא את העמודה השמאלית ביותר שבה מופיעה הספרה 1 בייצוג הבינארי של סכום נים S (זהו ה-1 המסומן בדוגמא בחץ).

קיימת לפחות ערימה אחת שביצוגה הבינארי מופיע 1 בעמודה זו. בחר אחת מערימות אלו.

a	11000	← נבחר בערימה a
b	1100	
c	11101	
S	1001	

ב. חבר (חיבור נים) את המספר המייצג את גדל הערימה בה בחרת ואת המספר המייצג את S .

ג. המספר שהתקבל הוא מספר הגפרורים שיש להשאיר בערימה שבחרת*. מספר הגפרורים שיש לקחת מהערימה הוא ההפרש בין הגודל הקודם של הערימה לבין גודלה הנוכחי.

a 11000

S 1001

10001 בינ' = 17 עשר'

יש לקחת 7 גפרורים מערימה a כדי שיוותרו בה 17 גפרורים. אם נסמן את $a +_2 S$ ב-a', נקבל $a'=17$.

בדיקה: a' 10001

b 1100

c 11101

S 00000

הסבר הדרך

I תמיד יתקבל בדרך זו סכום נים 0.

לסכום הנים התכונות הבאות:

א) עבור כל מספר x קיים $x +_2 x = 0$

ב) הפעולה $+_2$ היא קומוטטיבית ואסוציאטיבית.

מתוך תכונות א) ו-ב) $(a +_2 b +_2 c) +_2 S = 0$

נוכל לרשום $a +_2 S +_2 b +_2 c = 0$

נסמן את $a +_2 S$ ב a'

נקבל $a' +_2 b +_2 c = 0$

a' הוא הגודל החדש שיופיע במקום הערימה a ומספר זה בצירוף עם שתי הערימות האחרות נותן סכום נים 0.

II נראה כי בכל שלב מפחיתים את מספר הגפרורים בערימה. לשם כך צריך להראות ש- $a' < a$ כלומר $a +_2 S < a$.

הספרה הבינארית השמאלית ביותר (החזקה הגבוהה ביותר של 2) המשתנה, הופכת מ-1 ל- 0. הסבר: הערימה a נבחרת משום שיש בה 1 בעמודה בה מופיע ה-1 השמאלי ביותר בסכום הנים (ראה צעד א׳ לעיל). כיון שגם ב-S וגם ב-a מופיע 1 בעמודה זו הרי ב a' יופיע 0 בעמודה זו. לכן $a' < a$, ותמיד יש לקחת גפרורים מהערימה ולא להוסיף.

תרגיל

3. מצא את מספר הגפרורים שיש לקחת מאחת הערימות כדי להגיע למצב מנצח מהמצב: $a=9$, $b=10$, $c=20$

---

* כאן תוצג שיטה טבעית יותר למציאת מספר הגפרורים שיש להשאיר: בכל מקום שב-S יש 0 לא משנים את הספרה במספר המייצג את גודל הערימה ובמקום שב-S יש 1 מחליפים בערימה 0 ב- 1 ולהפך. מחשבה שניה תגלה ש- 2 השיטות הן זהות.

ראינו שלאחר כל פעולה של שחקן ב׳ יכול שחקן א׳ למצוא מספר מתאים של גפרורים כך שהוא יביא את סכום הנים ל- 0 כלומר, יביא את המשחק למצב מנצח.

כאן המקום להבהיר שיתכן מצב ששחקן א׳ (המכיר את המשחק) יהיה <u>מוכרח</u> להביא את המשחק למצב מפסיד. מצב זה יתכן כאשר:

א. במצב ההתחלתי סכום נים הוא 0 ושחקן א׳ מתחיל.

ב. במצב ההתחלתי סכום נים שונה מ-0, שחקן ב׳ מתחיל והוא יוצר במקרה מצב שסכום נים שלו 0.

אם ברצונך לנצח תמיד, השתדל להחליט קודם מיהו השחקן המתחיל ובהתאם להחלטה זו קבע את גדלן של הערימות!.

<u>תרגיל</u> מצא "קרבן" ושחק אתו במשחק הנים.

<u>הערות</u>

א. כאשר נתון גדלן של שתי ערימות ניתן לחשב מה צריך להיות גדלה של הערימה השלישית כדי שסכום נים יהיה 0. הפתרון עבור גדלה של הערימה השלישית הוא מספר יחיד והוא סכום נים של 2 הערימות הנתונות. מכאן, שכאשר בוחרים באופן אקראי 3 ערימות סביר שסכום נים שלהן יהיה שונה מ- 0.

ב. העקרונות שצוינו לעיל תואמים גם למשחק נים מורחב בו יש יותר משלוש ערימות. כללי המשחק, הגדרת המצב המנצח והדרך להגיע למצב מנצח תואמים לאלו שצוינו עבור שלוש ערימות.

<u>פתרונות לתרגילים</u>

1. א.

a	1100
b	11
c	110
S	1001

ב.

a	10110
b	10101
c	1010
S	1001

ג.

a	1101
b	1111
c	1011
S	1001

מתקבל אותו סכום נים עבור גודל שונה של הערימות.

2. $1 +_2 2 +_2 3 = 0$; $2 +_2 5 +_2 7 = 0$; $0 +_2 p +_2 p = 0$

3.

a	1001
b	1010
c	10100
S	10111

c	10100
S	10111
	11

$11_{\text{בינ׳}} = 3_{\text{עשר}}$

יש לקחת 17 גפרורים מערימה c כדי שישארו בה 3 גפרורים.