"Scientia sine artis nihil est
Ars sine scientia nihil est"

אלברכט דירר (1471 - 1528)
Albrecht Dürer

מאת: נחום יער

הקדמה

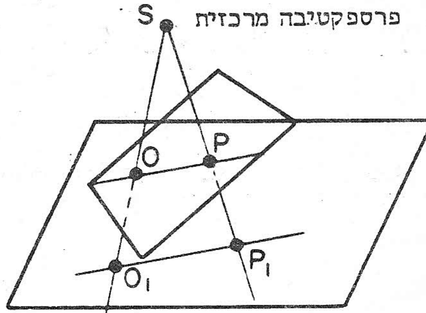
בין האנשים הרבים אשר תרמו להתפתחות המתמטיקה היו אחדים אשר "הילכו בשולי הדרך". המתמטיקה היתה להם תחביב, אם משום שמזגם המחפש חידושים נתפס לרעיון מסויים, או משום שפעילותם המקצועית חייבה פתרונות מתמטיים. אלברכט דירר שייך למתמטיקאים אשר הילכו בשולי הדרך. הוא היה אחד הבולטים בין הציירים הגרמניים של תקופתו.
ביצירותיו הביא דירר למזיגה נפלאה בין הסגנון הקודר והריאליסטי של הגותיזם הגרמני ובין הרוך והאור של הרינסנס האיטלקי.
אותנו מעניין דירר המתמטיקאי ולא דירר הצייר. להלן כמה נקודות מתוך כתביו המתמטיים.

מחדש בתורת הפרספקטיבה

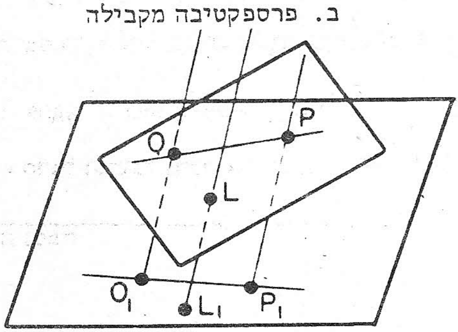
כצייר, חיפש דירר דרך להבנת המבנה הפרספקטיבי של תמונה והסברתו לאחרים. מימי קדם חיפשו דרך להצגת גוף הנדסי תלת-מימדי במישור. ציירים, אדריכלים ובעלי מלאכה התגברו על בעיה זו, כל אחד לפי דרכו ולפי כשרונו. בזמנו של דירר התחילו גדולי ציירי איטליה לחפש דרך לביסוס מדעי, גיאומטרי, לבניות בפרספקטיבה. דירר ביקר פעמיים באיטליה ותוך התעסקותו בנושא הגה רעיון להצגת גוף תלת מימדי בשני מישורים.

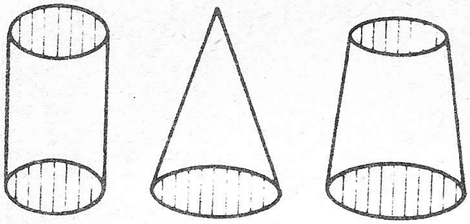
בציור פרספקטיבי אנו מטילים כל נקודה של גוף על מישור אחד נתון.
אנו מבדילים בין שני סוגי פרספקטיבה:

א. פרספקטיבה מרכזית



ב. פרספקטיבה מקבילה

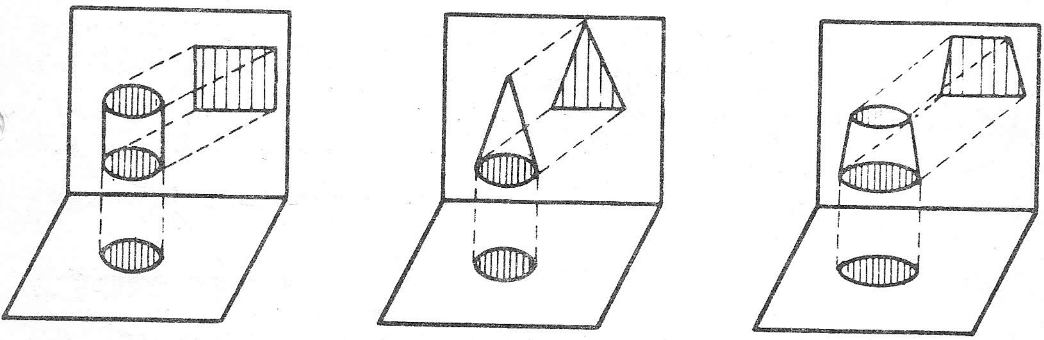




אולם, "אליה וקוץ בה"! הטלה על מישור אחד מטשטשת לפעמים תכונות מהותיות של הגוף. נתבונן בשלושת הגופים שלפנינו, גליל, חרוט וחרוט קטום.

אם נטיל את הגופים שבציור על מישור אופקי ־ נקבל עיגול בכל מקרה (המקביל לבסיסי הגופים).

כדי לקבל תמונה אמיתית של גוף הציע דירר להטילו על שני מישורים המאונכים זה לזה.



דירר הניח בזה יסודות להנדסה תיאורית אשר זכתה להתפתחות מזהירה רק כעבור 300 שנה בערך, במימיו של מונז' (1746-1818, Gaspard Monge)

<u>חלוקת זוית לשלושה חלקים שווים (Trisection)</u>

דירר נכנס ל"מועדון המתמטיקאים" בנסותו לפתור אחת משלוש הבעיות הקלאסיות של ימי קדם, בעית חלוקת זוית לשלושה חלקים השווים זה לזה (בעזרת סרגל ומחוגה בלבד)*. הבניה של דירר היא בניית קירוב קלה ופשוטה והטעות בחלוקה אינה עולה על "18.

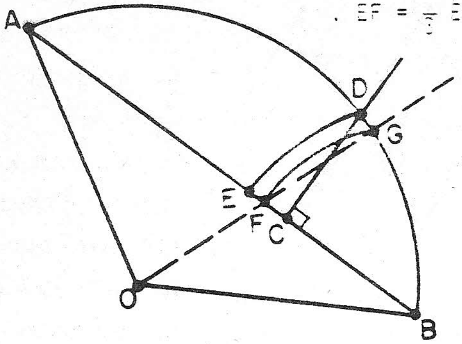
נתונה $\sphericalangle AOB$, זוית מרכזית במעגל.

בעזרת סרגל ומחוגה נחלק את המיתר AB לשלושה חלקים שווים. (הקטע BC מציין שליש

* ראה נספח

המיתר AB). נעלה ניצב בנקודה C החותך את הקשת בנקודה D .

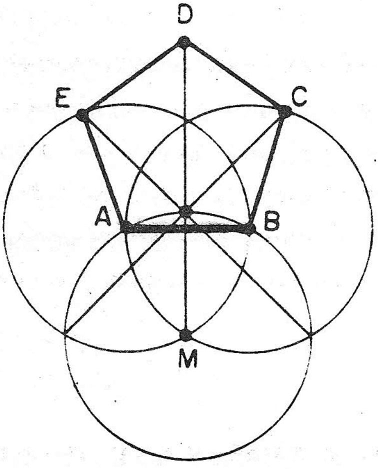
מעגל אשר מרכזו B ורדיוסו BD חותך את AB ב- E . נחלק את הקטע EC שעל המיתר לשלושה חלקים שווים, ואז כמובן $EF = \frac{1}{3} EC$.



מעגל אשר מרכזו B ורדיוסו BF חותך את הקשת ADB ב- G .
הזוית BOG היא שליש מקורב של ∢AOB
(הכתיבה מרובה אבל הביצוע פשוט ומהיר).

מצולעים משוכללים

בעיות בנייה קלאסיות לא היו זרות לדירר, אבל הוא היה איש המעשה וחיפש דרכים לבניות "כמעט קלאסיות". בין היתר הציע בניות למצולעים משוכללים שונים כמו מחומש, מתושע, מצולע בן אחת-עשרה צלעות ומצולע בן שלוש-עשרה צלעות. בציור שלפנינו דרך יפה לבניית מחומש משוכלל אשר צלעו הקטע הנתון AB.

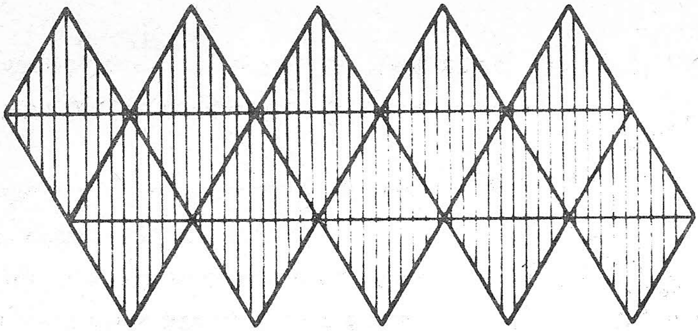


תיאור הבניה:
נבנה שלושה מעגלים (במחוג AB) אשר מרכזיהם ב- B,A ו- M[1] , ונקבל את הקודקודים החסרים E,D,C של המחומש.

---

[1] M - אחת מנקודות החיתוך של המעגלים סביב A ו- B .

פריסות של גופים



דירר אהב להשתעשע בצורות הנדסיות וגופים הנדסיים שונים. באחד מספריו הציע דרך לציור פריסות חמשת הגופים האפלטוניים (הפיאונים המשוכללים). את הפריסות אפשר לגזור ולקפל כדי לקבל את הגוף הרצוי. בציור פריסה של עשרימון (פיאון משוכלל בין עשרים פיאות) פריסה זו וגם אחרות שהן הצעותיו המקוריות של דירר נמצאות גם היום בספרי הנדסה.

ריבוע קסם

אחד התחריטים המפורסמים של דירר נקרא "מלנכוליה". במרכז התמונה יושבת אשה בעלת כנפיים וסביבה סמלים הנדסיים שונים (כדור, סרגל, מחוגה, קוביה בעלת פינות קטומות ועוד). יש אומרים שהתחריט מבטא את ניצחון המדע בעולם ויש טוענים שהתחריט נוצר לזכרו של המתמטיקאי יוהן מילר (רגיומונטנוס) אשר חי בנירנברג (1476-1436).
(רגיומונטנוס כתב את הספר האירופי הראשון המוקדש כולו לטריגונומטריה).
בפנית התחריט נראה ריבוע קסם מסדר ארבע שלפניך.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

שניים מהמספרים בשורה התחתונה הם תאריך היצירה (1514).
זהו אחד מריבועי הקסם המפורסמים ביותר בעולם המערבי (וגם אחד הראשונים באירופה המערבית הנוצרית).

לריבוע של דירר תכונות יפות ומיוחדות:

א. סכום המספרים בכל שורה, בכל טור וגם לאורך האלכסונים הוא 34.

ב. אם נחלק את הריבוע לארבעה ריבועים קטנים יהיה סכום המספרים בכל ריבוע המספר 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

דוגמא: $16 + 3 + 5 + 10 = 34$

ג. סכום הריבוע המרכזי גם הוא 34

$10 + 11 + 6 + 7 = 34$

ד. סכום המספרים שבארבע הפינות אף הוא 34

$1 + 4 + 16 + 13 = 34$

ה. ארבעת המספרים בכל שורה אפשר לחלק לשני זוגות. סכום זוג אחד הוא 19 וסכום הזוג השני הוא 15.

ו. חלוקה דומה אפשר לעשות בכל טור רק שכאן הסכומים הם 21 ו-13.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

להלן מספר תכונות נוספות של ריבוע קסם זה.

נחבר את אמצעי הצלעות (ראה ציור).

נבדוק את הצלעות הנגדיות של הריבוע החסום.

א. $5 + 3 + 12 + 14 = 34$

$2 + 8 + 9 + 15 = 34$

ב. הנה תכונה נוספת

$$5^2 + 3^2 + 12^2 + 14^2 = 2^2 + 8^2 + 9^2 + 15^2$$

וגם

$$5^3 + 3^3 + 12^3 + 14^3 = 2^3 + 8^3 + 9^3 + 15^3$$

קיימות תכונות נוספות של ריבוע קסם זה.

מעטים ריבועי הקסם בעלי תכונות כה רבות ומלאות קסם כמו הריבוע שלפנינו.

מענין לנסות למצוא אותן!

נספח:

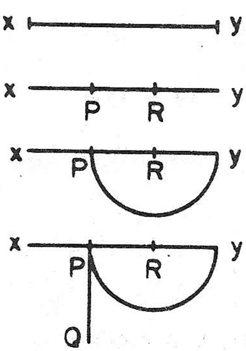
היוונים פתרו רבות מבעיותיהם המתמטיות על-ידי בניות בעזרת "הכלים האויקלידיים" - סרגל (ללא שנתות!) ומחוגה - כללי השימוש בהם הוכרו כבר בספר הראשון של אויקלידס. בעיות בניה רבות ומסובכות נפתרו בעזרת הכלים האלה. אולם, כבר בתקופת היוונים נתגלו בעיות שאין לפתור אותם בעזרת סרגל ומחוגה בלבד. לשאיפה העקשת במשך הדורות להגיע לפתרון של בעיות אלה, אנחנו מודים על תרומות מעניינות בהתפתחות הגיאומטריה!

שלוש הבעיות המפורסמות - ריבוע המעגל, הכפלת הקוביה ושילוש (trisection) הזוית - העסיקו ומעסיקות עד היום דמיונם של רבים: אפילו לאחר שהוכחה לפני כ-100 שנה אי האפשרות של הבניות הללו בכלים אויקלידים, מרצאים עד היום אנשים הטוענים כי "פתרו" את הבעיה!

הציטטה הבאה מאפיינת את גישתם.
"החלק הטוב של המתמטיקה היוונית וכן של מחשבה מתמטית מאוחרת יותר, מתבטא במאמצים להשיג את הבלתי אפשרי: כשהמאמצים לא נשאו פרי - הקלו בדרישות".

נעסוק כאן רק בשילוש הזוית ונתאר מכשיר מודרני הנבנה בעזרת הכלים האויקלידיים.
מכשיר זה מאפשר חלוקת זוית כלשהי לשלושה חלקים שווים.
לא ידוע מי הוא ממציא מכשיר זה, אך הוא מוכר מראשית המאה ה-19.

<u>בנית המכשיר</u>



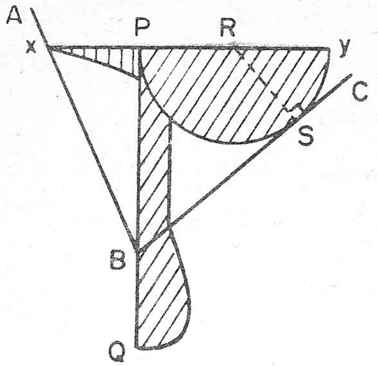
צעד ראשון: שרטט קטע $\overline{XY}$.

צעד שני: חלק את $\overline{XY}$ לשלושה קטעים שווים זה לזה בעזרת מחוגה וסרגל בלבד.

צעד שלישי: שרטט את חצי המעגל אשר קוטרו $\overline{PY}$

צעד רביעי: הטל אנך ל- $\overline{XY}$ בנקודה P כך שיתקבל PQ

לפניו מכשיר ל"שילוש" זוית כלשהי!



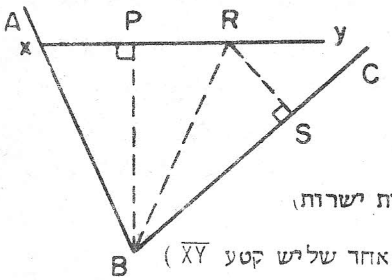
<u>הפעלת המכשיר</u>

נתונה $\sphericalangle ABC$

הנח את המכשיר כך שיתקיימו התנאים הבאים:

1. הנקודה תהיה מונחת על קרן AB
2. PQ יעבור דרך קודקוד הזוית $\sphericalangle B$
3. הקרן BC תהיה משיק לחצי המעגל בנקודה S

היות והמשולשים ΔXPB ΔPRB ו- ΔRSB הם חופפים, הקטעים $\overline{PB}$ ו- $\overline{RB}$ "משלשים" את הזוית



<u>הוכחת הבניה</u>

<u>טענה 1</u> $\Delta XPB \cong \Delta PRB$

הוכחה $\sphericalangle XPB = \sphericalangle RPB$ (זויות ישרות)

$\overline{XP} = \overline{PR}$ (כל אחד שליש קטע $\overline{XY}$)

$\overline{PB} = \overline{PB}$

$\Delta XPB \cong \Delta PRB$ צ.ז.צ.

ולכן $\sphericalangle RBP = \sphericalangle XBP$

<u>טענה 2</u> $\angle PRB = \angle RSB$

הוכחה $\overline{PR} = \overline{RS}$ (מחוגים של המעגל)

$\angle BPR = \angle BSR$ (זויות ישרות)

$\overline{BR} = \overline{BR}$

$\triangle PRB \cong \triangle RSB$ (משפט חפיפה רביעי: שתי צלעות והזוית מול הצלע הגדולה).

ולכן $\angle RBP = \angle RBS$

מכאן $\angle RBP = \angle PRB = \angle RBS$ ($\angle B$ מחולקת לשלוש זויות השוות זו לזו).

אם מראים מכשיר זה בכיתה, כדאי להסב את תשומת לב התלמידים לעובדה, שהמכשיר נבנה אמנם בכלים אויקלידיים, אולם פעולתו אינה פעולה היכולה להתבצע בעזרת כלים אויקלידיים בלבד. כדאי גם לשים לב לעובדה, כי הבניה המתוארת תתן תמיד רק פתרון מקורב בגלל אי הדיוק שבקביעת מצב המשיק (ראה תנאי 3).