בעיות

1. נתון כי המספר $781\cdot965 = 753y65$ מצא את y בלי לבצע את הכפל.

2. מה הן שתי הספרות האחרונות של 3^{999}?

3. נתון כי $a+b+c=0$. חשב את

$$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)$$

4. הרי הוכחה כי $2 = 1$, מצא את הפגם בה:

$$x^2 = x\cdot x = x+x+\ldots+x$$

כשבסכום מופיעים x מחוברים

$$\frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d}{dx}(x+x+\ldots+x)$$
$$= 1+1+1\ldots+1$$
$$= x$$
$$2x = x$$
$$2 = 1$$

5. האם נמצאים אנשים החיים כיום היכולים להצהיר:
"הייתי בן x שנים בשנה x^2"?
ואם כן מה הערך של x ובני כמה הם היום?

פתרון הבעיות ב„שבבים" מס' 2 נערך ע"י נ. חטיבה

1. נתון $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 3$.

מבלי לחשב את x, חשב את $x^3+\frac{1}{x^3}$.

<u>פתרון</u>

$$x^3+\frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right) = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right] = \left(x+\frac{1}{x}\right)[3-3]=0$$

בשלב האחרון הצבנו את הנתון: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = 3$.

2. ידוע כי e מספר טרנסצנדנטי. הוכח כי $\log_e 2$ הוא מספר אי רציונלי.

<u>פתרון</u>

נחזור על הגדרות המונחים המופיעים בבעיה:

מספר אי רציונלי: מספר ממשי שאינו ניתן לביטוי כמנה של שני מספרים שלמים.

מספר טרנסצנדנטי: מספר ממשי (או מרוכב) שאינו שורש של משוואה "אלגברית" ממעלה n, $n>0$, שצורתה

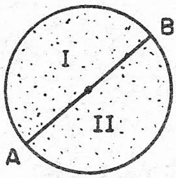
$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad a_0 \neq 0$$

a_k מספרים רציונליים, n טבעי.

ההוכחה (בדרך שלילה): נניח כי $\log_e 2$ הוא מספר רציונלי. כלומר, קיימים p,q מספרים שלמים $q\neq 0$ אשר $\log_e 2 = \frac{p}{q}$. נניח ש- $p > 0$ בלי הגבלת הכלליות. מכאן $e^{p/q}=2$ או $e^p = 2^q$.
2^q הוא מספר רציונלי, נסמנו ב- k . קיים: $e^p-k=0$. כלומר, e הוא שורש של המשוואה האלגברית $x^p-k=0$ בסתירה להיותו מספר טרנסצנדנטי.

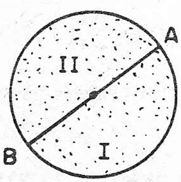
3. פנים מעגל מכיל 2 מליון נקודות, כך שאין זוג נקודות מביניהן שהן על קוטר אחד. האם <u>חייב</u> להיות במעגל זה קוטר - המחלק את המעגל לשני חלקים, כך שפנים כל אחד משני חצאי המעגל יכיל בדיוק מליון נקודות? נמק.

<u>פתרון</u>



יהי AB קוטר במעגל כך שאף אחת מבין $2\cdot 10^6$ הנקודות הנתונות אינה נמצאת עליו. קיימים אינסוף קטרים כאלו כי מספר הקטרים העוברים דרך הנקודות הנתונות הוא סופי.

הקוטר AB מחלק את קבוצת הנקודות הנתונות לשני חלקים. נניח שאחד משני חצאי המעגל (I) מכיל 10^6-k נקודות כאלו ($k>0$ מספר שלם) והחצי השני (II) מכיל את שאר 10^6+k הנקודות. נסובב קוטר זה בכיוון אחיד (למשל, נגד כיוון השעון). בעת הסיבוב עובר הקוטר דרך נקודות הקבוצה. בכל שלב יש על הקוטר לכל היותר נקודה אחת. וכך, אחרי ש"יעבור" נקודה אחת למשל, תהיינה בחצי המעגל (I) 10^6-k+1 או 10^6-k-1 נקודות. לאחר סיבוב של $180°$ תהיינה בחצי המעגל (I) 10^6+k נקודות. היות ומספר הנקודות עובר מ- 10^6-k ל- 10^6+k כאשר בכל שלב נוספת או מוחסרת נקודה אחת; הרי לפחות באחד המצבים של הקוטר תהיינה בחצי המעגל (I) בדיוק 10^6 נקודות של הקבוצה.



איברי הסידרה $\{a_n\}$ מקיימים:

$$a_0 = 0,\ n = 0,1,2,\dots,\quad a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 + 1}$$

הוכח כי איברי הסידרה הם מספרים שלמים.

<u>פתרון</u>

הנוסחה הנתונה: $$a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2+1} \qquad (1)$$

נבדוק כמה מקרים בודדים:

נציב בה $n=0$ $a_0=0$ ונקבל: $a_1 = 5\cdot 0 + \sqrt{1} = 1$

נציב בה $n = 1$ ונקבל: $a_2 = 5\cdot 1 + \sqrt{24+1} = 5+5=10$

נציב $n = 2$ $a_3 = 5\cdot 10 + \sqrt{2400+1} = 50+49=99$

a_1, a_2, a_3 אכן מספרים שלמים, אבל עלינו להוכיח ש a_{n+1} מספר שלם עבור n כלשהו.

נחפש קשר בין a_{n+1} לבין איברים קודמים לו בסידרה (קשר שלא יכלול פעולה של הוצאת שורש).

אם ב- (1) נעלה בריבוע ($5a_n$ עובר לאגף השמאלי):

$$a_{n+1}^2 - 10a_n a_{n+1} + 25a_n^2 = 24a_n^2 + 1$$

נסדר כמשוואה ריבועית במשתנה a_n:

$$a_n^2 - 10a_{n+1}a_n + (a_{n+1}^2 - 1) = 0$$

ושורשיה:

$$a_n = 5a_{n+1} \pm \sqrt{25a_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 + 1}$$

נחליף בשוויון האחרון את n ב- $n-1$:

$$a_{n-1} = 5a_n \pm \sqrt{24a_n^2+1} \qquad (2)$$

נשווה את (2) ל- (1). כדי שהטור יהיה לא טריביאלי $a_{n+1} \neq a_{n-1}$,

במשוואה (2) נבחר בסימן המינוס לפני השורש ונחבר את האגפים המתאימים ב- (1) ו- (2):

$$a_{n+1} + a_{n-1} = 10a_n$$

ומכאן הביטוי המבוקש ל- a_{n+1} $$a_{n+1} = 10a_n - a_{n-1} \qquad (3)$$

נציב ב- (3) $n = 1$ $a_2 = 10a_1 - a_0 = 10\cdot 1 - 0 = 10$

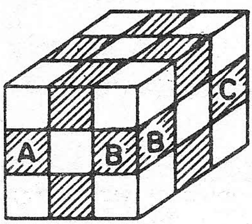
נציב ב- (3) $n = 2$ $a_3 = 10a_2 - a_1 = 10\cdot 10 - 1 = 99$

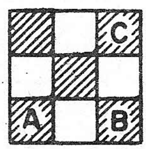
וכך הלאה. כפל וחיסור במספרים שלמים יתנו תמיד a_{n+1} מספר שלם.

5. 27 קוביות גבינה קטנות בעלות מקצוע a כל אחת, מסודרות כך שהן יוצרות קוביה אחת גדולה שמקצועה $3a$. עכבר מתחיל לאכול קוביה קטנה, ואחר כך קוביה בעלת פאה משותפת עם הראשונה, וכך הלאה. האם העכבר יוכל לסיים את סעודתו בקוביה הקטנה הנמצאת במרכז הקוביה הגדולה?

<u>פתרון</u>

נצבע את כל הקוביות בשני צבעים. נתחיל בקוביה המרכזית ונצבע אותה בשחור. כל קוביה סמוכה לה (כך שיש להן פאה משותפת) נצבע בלבן וכך הלאה באופן שכל שתי קוביות סמוכות הן שונות צבע. באופן זה מתקבלות 13 קוביות שחורות ו-14 לבנות. אם העכבר יתחיל את סעודתו בקוביה שחורה, הוא לא יגמור לאכול את כל הקוביות. אם הוא רוצה לגמור את כולן - הוא חייב להתחיל בקוביה לבנה ואז הוא לא יסיים בקוביה המרכזית שהיא שחורה.





שכבה מרכזית