שמוש „בעקרון רועה הצאן"
להתרת בעיה גיאומטרית

מאת: גין מורו
תרגום: עקיבא סקידל, בי"ס אזורי כפר בלום

הנה בעיה ידועה למדי: כמה ריבועים בסריג של n x n משבצות ריבועיות?

התשובה לשאלה זו היא:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 \quad (1$$

כלומר,

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

שינוי קל בתנאי הבעיה מוליך לתוצאות מפתיעות למדי, והבעיה החדשה יכולה לשמש מבוא יפה ללימוד טכניקה מתוחכמת בפתרון בעיות קומבינטוריות מסוימות.

נשאל את השאלה: כמה מלבנים אפשר למצוא באותו סריג של n x n משבצות?

למעשה מופיעות כאן שתי שאלות:

א. כמה סוגי מלבנים כאן? (הכוונה למספר המלבנים השונים זה מזה בממדיהם.)

ב. כמה מלבנים מכל סוג?

---

1) ראה נספח א (מאת עקיבא סקידל)

אם נצייר, לדוגמה, סריג 3 x 3, נראה שמופיעים המלבנים (כולל ריבועים) בעלי הממדים הבאים:

3 x 3   2 x 2   1 x 1

2 x 3   1 x 2

1 x 3

(שים לב! אין אנו מבחינים בין מלבן r x s לבין מלבן s x r.) יש כאן, אם כן, בסך הכל ששה סוגי מלבנים שונים. ומהו מספר המלבנים מכל סוג? מספר הריבועים כבר ידוע לנו - 14;
מלבנים 2 x 1 יש שניים בכל שורה ושניים בכל עמודה - בסך הכל 12;
מלבנים 3 x 1 יש 6 ומלבנים 3 x 2 יש שניים במאוזן ושניים במאונך, בסך הכל 4.

נחבר: $14 + 12 + 6 + 4 = 36$

אם נבדוק כמה מקרים פרטיים אחרים, נגיע לנתונים הבאים:

גודל הסריג	מס׳ סוגי המלבנים השונים	המס׳ הכולל של מלבנים
1 × 1	1	1
2 × 2	3	9
3 × 3	6	36
4 × 4	10	100
5 × 5	15	225
.	.	.
.	.	.
.	.	.

עולות על הדעת שתי השערות:

א. מספר סוגי המלבנים השונים בסריג n x n הוא:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

ב. המספר הכולל של מלבנים באותו סריג הוא:

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

לצורך הוכחת ההשערות הללו נשתמש בעקרון הספירה הידוע בשם "עקרון רועה הצאן":

"איך מוצאים את מספר הכבשים בעדר? סופרים את הרגליים, ומחלקים ב-4".

הוכחת השערה א׳

ראשית נדון במלבנים בגודל $r \times s$ שאינם ריבועים, כלומר:

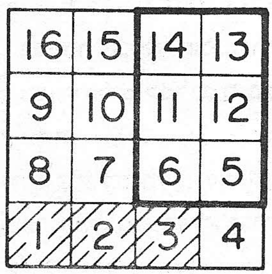
$$1 \le r \le n\ , \quad 1 \le s \le n, \quad r \ne s$$

את המספר הראשון (מתוך n) אפשר לבחור ב- n אופנים, את המספר השני ב- $(n - 1)$ אופנים. בסך הכל אפשר ליצור זוג סדור $(r\ ,s)$ ב- $n(n - 1)$ אופנים. אך מכיון שאצלנו מלבן $r \times s$ זהה עם מלבן $s \times r$ יש לחלק מספר זה ב-2, ונקבל $\frac{n(n-1)}{2}$ סוגי מלבנים, שאינם ריבועים. מספר הריבועים בסריג $n \times n$, השונים בגודלם זה מזה, הוא n. אם כן, מספר סוגי המלבנים הוא:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

הוכחת השערה ב׳:

ראשית נמספר את המשבצות במספרים טבעיים מ-1 עד n^2. כל זוג סדור של משבצות (a,b) (כאשר $1 \le a \le n^2$, $1 \le b \le n^2$) קובע מלבן, כך שהמשבצות a ו- b נמצאות בפינות נגדיות של המלבן. למשל, בציור מס׳ 1 קובע הזוג $(1\ ,3)$ את המלבן המקווקו והזוג $(6\ ,13)$ קובע את המלבן שבתוך המסגרת העבה. אך לצערנו ההתאמה איננה חד-חד-ערכית: יותר מזוג סדור אחר יכול להתייחס לאותו מלבן. בדוגמה שלנו, המלבן המקווקו מיוחס גם לזוג הסדור $(3\ ,1)$ והמלבן שבתוך המסגרת מיוחס גם לזוגות $(13\ ,6)$, $(5\ ,14)$ ו- $(14\ ,5)$. אם כן, אין מנוס מלהיעזר בעיקרון רועה הצאן.

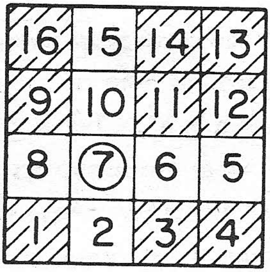


ציור 1

בשלב ראשון נשים לב לעובדה שקיימת התאמה חד-חד-ערכית בין המשבצות הבודדות לבין הזוגות (a, b) כאשר $a = b$. מספר הזוגות מסוג זה הוא n^2. כעת נטפל בחזרות: ציור מס׳ 1 מדגים מלבן (המקווקו) המיוחס לשני זוגות סדורים, ומלבן אחר (במסגרת) המיוחס ל-4 זוגות סדורים. מתברר שאלה הם שני סוגי החזרות היחידים שבהם אנחנו עלולים להיתקל: חזרות שבהן גורם ההכפלה הוא 2 וזה קורה למלבנים מגודל $1 \times s$ (כאשר $s \geq 2$); וחזרות שבהן גורם ההכפלה הוא 4, כאשר המלבנים הם מגודל $r \times s$ $(s \geq 2, r \geq 2)$.

נקרא למלבנים מהקבוצה הראשונה בשם "מלבנים בעלי רוחב 1". כמה זוגות סדורים של מספרים קובעים מלבנים כאלה? המספר הראשון בזוג ניתן להיבחר ב-n^2 דרכים (כי הרי כל משבצת עשויה להופיע כקצה של מלבן בעל רוחב 1). המספר השני בזוג אינו יכול להתייחס לאותה משבצת עצמה, אך הוא חייב להתייחס למשבצת הנמצאת באותה השורה או באותה העמודה עם המשבצת שנבחרה ראשונה. אם, למשל, בסריג 4×4, בחרנו ראשונה במשבצת 7 (ראה ציור מס׳ 2), נוכל לבחור כמשבצת שניה כל אחת מהמשבצות הלא-מקווקוות, פרט ל-7 עצמה. מספר המשבצות הללו במקרה שלנו הוא: $2 \cdot 3$, או 6. בדרך כלל, בסריג $n \times n$ מספרן יהיה $2(n - 1)$. אם כן, המספר הכולל של זוגות סדורים המתייחסים למלבנים בעלי רוחב 1 יהיה: $n^2 \cdot 2(n - 1)$ בדרך זו מופיע כל מלבן פעמיים ולכן מספר המלבנים האלה יהיה:

$$\frac{n^2 \cdot 2(n - 1)}{2} = n^3 - n^2$$



ציור 2

נעבור כעת למלבנים בעלי רוחב גדול מ-1. כמה ישנם? שוב, פינה אחת של מלבן כזה אפשר לבחור ב- n^2 דרכים, אך הפינה ממול אינה יכולה להיות בשורה אחת עם הפינה הראשונה, וגם לא באותה העמודה. אם נסתכל שוב בדוגמה שלנו (ציור מס׳ 2, סריג 4×4), נראה שהמועמדים היכולים למלא את מקומו של x בזוג $(x, 7)$ הם כל המשבצות המקווקוות. מספרן הוא 3^2, או 9. באופן כללי, בסריג $n \times n$, יהיה מספרן $(n - 1)^2$. אם כן, מספר הזוגות הסדורים המיוחסים למלבנים מסוג זה הוא $n^2(n - 1)^2$ ומספר המלבנים האלה - בהתחשב בחזרות - הוא:

$$\frac{n^2(n - 1)^2}{4}$$

כעת נצרף את שלוש התבניות - התבנית למספר המשבצות הבודדות, התבנית למספר המלבנים בעלי רוחב 1, והתבנית למספר המלבנים שרוחבם עולה על 1 - ונקבל:

$$n^2 + (n^3 - n^2) + \frac{n^2(n - 1)^2}{4}$$

$$= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

$$= \left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^2$$

$$= (1 + 2 + 3 + . . + n)^2$$

בזה הוכחנו את השערה ב׳. אם עוד נשים לב לעובדה כי:

$$\left(\frac{n(n + 1)}{2}\right)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + . . . + n^3$$

נוכל לבטא את התוצאות שקיבלנו בצורה מאלפת: בסריג $n \times n$, מספר המלבנים מסוגים שונים הוא סכום n המספרים הטבעיים הראשונים.

סך-הכל מספר הריבועים הוא סכום רבועי n המספרים הטבעיים הראשונים.

סך - הכל מספר המלבנים הוא סכום n המספרים הטבעיים הראשונים בחזקה שלישית.

ראינו כאן דוגמה לבעיה שבה קל יותר לספור את ה"רגליים" ולחלק ל-4 מאשר לספור את ה"ראשים". כדאי ללמוד טכניקה זו - לא פעם יוצא להשתמש בה בבעיות אלגבריות סבוכות למדי.[1]

נספח א:

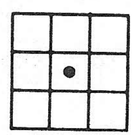
<u>כמה ריבועים יש בסריג n x n</u>

(קורא שאינו מכיר בעיה זו עשוי למצוא בה ענין ואולי במיוחד בדרך פתרונה.)

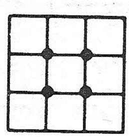
מהסתכלות במקרים פשוטים מתקבלים הנתונים הבאים:

גודל הסריג	מספר הריבועים 1×1	מספר הריבועים 2×2	מספר הריבועים 3×3	מספר הריבועים 4×4	ס"ה
1×1	1				1
2×2	4	1			5
3×3	9	4	1		14
4×4	16	9	4	1	30

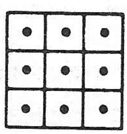
ההשערה היא שהפתרון הכללי הוא $1^2 + 2^2 + 3^2 + . . . + n^2$, ואישור להשערה זו מתקבל מהשיקול הבא: ניקח לדוגמה סריג 3×3, ונשים לב <u>למרכזי</u> הריבועים השונים:



מרכז
הריבוע
הגדול (3×3)



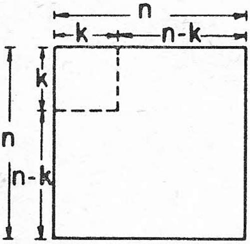
מרכזי
הריבועים
הבינוניים (2×2)



מרכזי
הריבועים
הקטנים (1×1)

1) ראה נספח ב' (מאת עקיבא סקידל).

הוכחה: בריבוע $n \times n$ נמנה את הריבועים החלקיים $k \times k$; $1 \le k \le n$



ניקח ריבוע חלקי שאחד מקודקודיו מתלכד עם אחד מקודקודי הריבוע $n \times n$ (ראה ציור) הריבוע החלקי יכול לזוז בכיוון מאוזן ואף בכיוון מאונך לעוד $n - k$ מצבים. כלומר, הריבוע החלקי $k \times k$ יכול להמצא ב- $n - k + 1$ מצבים בכל אחד משני הכיוונים. מספר המצבים הוא לפיכך: $(n - k + 1)^2$

מספר כל הריבועים החלקיים הוא לכן:

$$\sum_{k=1}^{n} (n - k + 1)^2 = n^2 + (n - 1)^2 + . . . + 2^2 + 1^2$$

נספח ב:

נוסף להדגמת "עקרון רועה הצאן" יכולה בעיה זו לשמש גם דוגמה לדרך פתרון האהובה על הפדגוג המתמטי הדגול ג'ורג' פוליה (G. Polya) . עיקרי הדרך לפתרון בעיה בעלת אופי כללי: הסתכלות בכמה מקרים פרטיים פשוטים, איסוף התוצאות מהסתכלות זו ורישומם באופן מסודר, נסיון לשער השערה כללית על סמך הנתונים שנאספו, חיזוק ההשערה על-ידי בדיקת כמה מקרים פרטיים נוספים (או ביטולה, אם בדיקת המקרים הנוספים שוללת אותה - ואז חיפוש השערה אחרת), הוכחת ההשערה.

בעברית מצוי ספרו של פוליה: <u>כיצד פותרין</u>, אוצר המורה, תל-אביב 1961; ספריו העיקריים בנושא "דרכי הפתרון של בעיות" הם:

(1) <u>Mathematics and Plausible Reasoning</u>, 2 Vols. Princeton University, 1954.

(2) <u>Mathematical Discovery</u>, 2 Vols. Wiley 1962, 1965.