משפט מק-קי

מאת: לורנס שֶרזר
תרגום: חנה תלמי

ברשימה זו מתאר המחבר סיטואציה מאלפת שהתרחשה בכיתתו, כיתה ח׳, בבית הספר "רנסום" בפלורידה.

הנושא שעמד במרכז אחד השעורים שהתקיימו לאחרונה בכיתה היה מציאת מספר רציונלי הנמצא בין שני מספרים רציונליים נתונים. שוחחנו על שברים בין 0 ל- 1. המספרים $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ וכו׳ תוארו כמספרים הנמצאים, בהתאמה, בין 0 ל- 1, 0 ל- $\frac{1}{2}$, 0 ל- $\frac{1}{4}$, 0 ל- $\frac{1}{8}$ וכן הלאה. הובאו דוגמאות נוספות ואז שאל אחד התלמידים: "איך נמצא מספר בין שני מספרים כל שהם, למשל $\frac{1}{6}$ ו- $\frac{1}{5}$?"

שאלה זו גררה אחריה דיון שעסק בשיטה למציאת נקודת האמצע בין שני המספרים הנתונים, כלומר,

$$\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}{2} = \frac{\frac{11}{30}}{2} = \frac{11}{30}\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{60}$$

התלמידים לא שוכנעו. היה צורך להזכירם ש: $\frac{1}{6} = \frac{10}{60}$ ו- $\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$ כדי להראות ש $\frac{11}{60}$ אכן נמצא ביניהם.

אחד התלמידים טען שהדוגמה קלה מדי והציע לנסות דוגמה נוספת - מציאת מספר בין $\frac{7}{8}$ לבין $\frac{5}{6}$.

חזרנו על התהליך ומצאנו:

$$\frac{\frac{7}{8}+\frac{5}{6}}{2} = \frac{\frac{21+20}{24}}{2} = \frac{41}{24}\cdot\frac{1}{2} = \frac{41}{48}$$

וגם כאן היה צורך בתזכורת כי: $\frac{7}{8} = \frac{42}{48}$ ו- $\frac{5}{6} = \frac{40}{48}$

כדי לשכנעם בנכונות השיטה.

Laurence Sherzer, "McKay's Theorem", Mathematics Teacher, March 1973 (Vol. 66, pp, 229-30), copyright by the National Council of Teachers of Mathematics. Used by permission.

עמדתי לעבור לדוגמה נוספת כאשר פתאום התערב אחד התלמידים. נראה היה שהוא לא עקב בריכוז אחר הנעשה בכיתה אלא עסק בכתיבה ללא הרף. "המורה, אין צורך לטרוח כל כך כדי למצוא שבר הנמצא בין שני שברים נתונים, מספיק לחבר מונה למונה ומכנה למכנה".

עמדתי לדחות את טענתו מיד, אך עצרתי בי בעוד מועד ואמרתי לנער ששמו מק-קי; "הבה ונראה". שתי הדוגמאות הראשונות היו עדיין על הלוח וכך חזרנו לראשונה:

$$\frac{1}{6} \text{ ו- } \frac{1}{5}$$

לאחר חיבור המונים והמכנים, לפי שיטתו של מק-קי קיבלנו $\frac{2}{11}$.

פניתי אל מק-קי ואמרתי "אתה טוען ש $\frac{2}{11}$ נמצא בין $\frac{1}{6}$ ל- $\frac{1}{5}$." לא עלה במוחי משפט האומר: יהיו נתונים $\frac{a}{b}$ ו- $\frac{c}{d}$ כאשר a, b, c, d שלמים וחיוביים אז $\frac{a+c}{b+d}$ נמצא בין $\frac{a}{b}$ לבין $\frac{c}{d}$.

"הבה ונמצא מכנה משותף לשלושת המספרים הללו" אמרתי. עשינו כך ומצאנו,

$$\frac{1}{6} = \frac{55}{330} \qquad \frac{1}{5} = \frac{66}{330} \qquad \frac{2}{11} = \frac{60}{330}$$

אכן, $\frac{2}{11}$ נמצא בין $\frac{1}{6}$ ל- $\frac{1}{5}$ כטענת מק-קי! "הבה ננסה את הדוגמא השניה" המשכתי ואמרתי. המספרים הנתונים הם: $\frac{7}{8}$ ו- $\frac{5}{6}$.

היה עלינו להראות ש $\frac{12}{14}$ או $\frac{6}{7}$ נמצא בין $\frac{7}{8}$ ל- $\frac{5}{6}$. ואכן,

$$\frac{5}{6} = \frac{140}{168} \qquad \frac{6}{7} = \frac{144}{168} \qquad \frac{7}{8} = \frac{147}{168}$$

התלמידים היו נרגשים. חלקם רצה לתקוף את טענתו של מק-קי וכך נסינו עוד ועוד דוגמאות. בכולן עמד "משפט מק-קי" במבחן. המספרים גדלו והלכו והגענו עד ל- $\frac{76}{81}$ ו- $\frac{29}{40}$.

כאן התערבתי ואמרתי: "הדרך היחידה להכרעה היא לנסות להוכיח את המקרה הכללי". לשאלתי אם מעוניינים הם בהוכחה - השיבו "כן" במקהלה.

"יתכן שתתקשו במקצת לעקוב אחר ההוכחה, אך הבה ננסה לעשות כמיטב יכולתנו" אמרתי. "נניח שנתון $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. עלינו להוכיח כי $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. נבדוק תחילה אם

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$$

הסברתי מעט לתלמידים את תכונות האי-שוויונים וסיימתי בכך שמאחר ואנו עוסקים במספרים חיוביים בלבד הרי קיים:

$$a(b+d) < b(a+c)$$

ולכן $ab + ad < ba + bc$

ולכן $ad < bc$ או $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

(לאחר מכן מצאתי הוכחה אלגנטית מעט יותר, אשר כללה את כל המספרים השלמים).

לא קל היה להסביר לתלמידים כי למעשה בזאת הוכחתי את הטענה משום שאפשר לחזור על הצעדים שהראיתי בכיוון הפוך. בכיתה התעורר ויכוח אך כשצלצל הפעמון הסכמנו להמשיך ולחשוב על כך ועאת חלקה השני של הטענה:

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

יוכיחו התלמידים כשיעורי בית.

בצאתי מן הכיתה חשבתי בלבי על אותו רגע שבו עמדתי לומר למק-קי "לא, זו אינה הדרך".

הוכחה נוספת ל"משפט מק-קי" (פרופ' מ. ברוקהיימר)

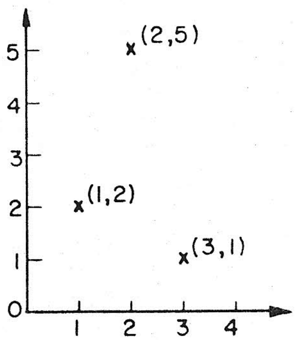
הקדמה

נוכל לתאר שבר במערכת צירים כאשר הקואורדינטה הראשונה תייצג את המונה והקואורדינטה השניה תייצג את המכנה.

לדוגמא: $\frac{2}{5}$ מיוצג על ידי הנקודה $(5, 2)$.

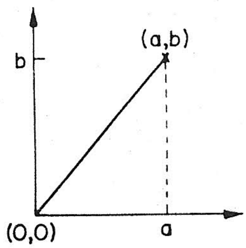
$\frac{1}{2}$ מיוצג על ידי הנקודה $(1, 2)$

$\frac{3}{1}$ מיוצג על ידי הנקודה $(3, 1)$



שברים שווי ערך ל- $\frac{2}{5}$ נמצאים על הישר העובר דרך הנקודה $(0, 0)$ והנקודה $(2, 5)$

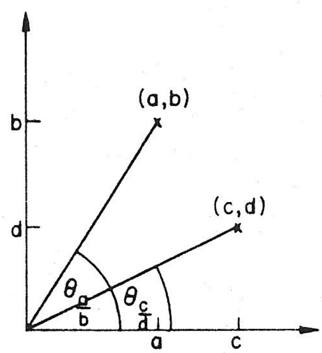
שברים שווי ערך ל- $\frac{1}{2}$ נמצאים על הישר העובר דרך הנקודה $(0, 0)$ והנקודה $(1, 2)$



שברים שהם שווי ערך ל- $\frac{3}{1}$ נמצאים על הישר העובר דרך הנקודה $(0, 0)$ והנקודה $(3, 1)$

שיפוע הישר העובר מהנקודה $(0, 0)$ לנקודה (a, b) הוא $\frac{b}{a}$.

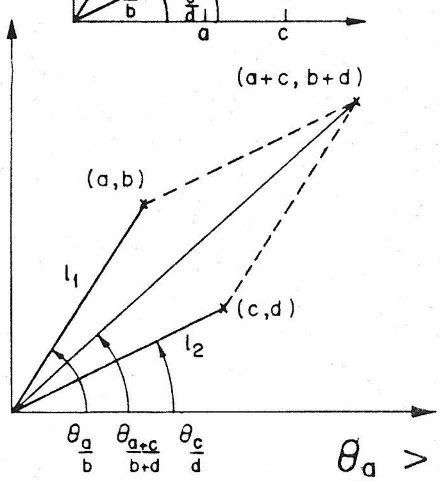
הנקודה (a, b) מייצגת את השבר $\frac{a}{b}$.



שיפוע הישר הוא איפוא המספר ההופכי לשבר ככל שיקטן השבר כן תגדל הזוית שבין הישר והציר האופקי.

במילים אחרות $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \theta_{\frac{a}{b}} > \theta_{\frac{c}{d}}$

<u>טענה</u> $0 < \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$



<u>הוכחה</u> נשלים את המקבילית (ראה ציור).
האלכסון מהנקודה $(0, 0)$ לנקודה $(a + c, b + d)$ נמצא בין ℓ_1 ו ℓ_2
ולכן:

$$\theta_{\frac{a}{b}} > \theta_{\frac{a+c}{b+d}} > \theta_{\frac{c}{d}} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} < \frac{c}{d}$$

מ.ש.ל.