# בעיות

## נערך ע"י נירה חטיבה בי"ס תיכון חדש ת"א

1. נתון: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$.

מבלי לחשב את $x$ , חשב את $x^3 + \frac{1}{x^3}$ .

2. ידוע כי $e$ מספר טרנסצנדנטי. הוכח כי $\log_e 2$ הוא מספר אי רציונלי.

3. פנים מעגל מכיל 2 מליון נקודות, כך שאין זוג נקודות מביניהן שהן על קוטר אחד. האם חייב להיות במעגל זה קוטר - המחלק את המעגל לשני חלקים, כך שפנים כל אחד משני חצאי המעגל יכיל בדיוק מליון נקודות? נמק.

4. איברי הסידרה $\{a_n\}$ מקיימים:

$$a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 + 1} \quad , n = 0,1,2,\dots, \quad a_0 = 0 .$$

הוכח כי איברי הסידרה הם מספרים שלמים.

5. 27 קוביות גבינה קטנות בעלות מקצוע $a$ כל אחת, מסודרות כך שהן יוצרות קוביה אחת גדולה שמקצועה $3a$. עכבר מתחיל לאכול קוביה קטנה, ואחר כך קוביה בעלת פאה משותפת עם הראשונה, וכך הלאה. האם העכבר יוכל לסיים את סעודתו בקוביה הקטנה הנמצאת במרכז הקוביה הגדולה?.

## פתרון בעיות קודמות

## (שהוצגו בגליון מס. 1 של "מתמטיקה למורה")

1. אם $d,c,b,a$ ו־ $y,x$ מסמנים בהתאמה את האורכים של 4 צלעות עוקבות של מרובע ושני אלכסוניו ואם מרובע זה ניתן להחסם במעגל וניתן לחסום בו מעגל, הוכח כי:

$$(a + b + c + d)^2 \geq 8xy$$

והשוויון קיים אם ורק אם המרובע הוא ריבוע.

<u>הוכחה:</u>

מאחר שהמרובע ניתן להחסם במעגל, קיים לפי משפט תלמי ( Ptolemy ,
ראה "גיאומטריה" של לדז'ינסקי עמ' 161): $\quad (1)\ ac + bd = xy$

ומאחר שהמרובע חוסם מעגל, קיים: $\quad a + c = b + d$

לכן:

$$(a - b + c - d)(a + c) = (a - b + c - d)(b + d)$$

לאחר פתיחת סוגריים וכינוס:

$$(2)\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd) = 2(ab + ad + bc + cd)$$

באופן כללי מתקיים: $\quad (3)\ (a - c)^2 + (b - d)^2 \geq 0$

מ־(3), לאחר סידור $\quad (4)\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2(ac + bd)$

אבל: $\quad (a + b + c + d)^2$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(ac + bd) + 2(ab + ad + bc + cd)$$

לפי (2) $= 2[(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(ac + bd)]$

לפי (4) $\geq 2 \cdot 4(ac + bd)$

ולכן לפי (1) $(a + b + c + d)^2 \geq 8xy$

מ. ש. ל.

אי השויון היחיד בו השתמשנו, הוא (3). לכן - שויון יתקיים אם ורק אם יתקיים שויון ב-(3), כלומר - אם ורק אם $a = c$ ו- $b = d$. מרובע המקיים תנאים אלו הוא מקבילית. אבל מקבילית החוסמת מעגל היא מעוין ומקבילית החסומה במעגל, היא מלבן.

לכן - שויון יתקיים אם ורק אם המרובע הוא ריבוע.

---

2. הוכח: $(n - 1)^n > n^{n - 1}$, לגבי כל $n$ טבעי $n > 3$.

<u>הוכחה באינדוקציה</u>

בדיקה: לגבי $n = 4$ הטענה נכונה: $3^4 > 4^3$

נניח כי הטענה נכונה לגבי $n = k$: $(k - 1)^k > k^{k - 1}$ (1)

ונוכיחה לגבי $n = k+1$ כלומר כי: $k^{k + 1} > (k + 1)^k$

לשם כך נכפול את שני אגפי (1) ב $(k+1)^k$ (חיובי):

$$(k - 1)^k(k + 1)^k > k^{k - 1}(k + 1)^k$$

(2) $(k^2 - 1)^k > k^{k-1}(k+1)^k$

(3) מאחר ש: $k^2 > k^2 - 1 > 0$ , קיים: $k^{2k} > (k^2 - 1)^k$

מ (2) ו (3) נובע: $k^{2k} > k^{k-1}(k+1)^k$

נצמצם ב $k^{k-1}$ (חיובי) ונקבל: $k^{k+1} > (k+1)^k$

מ. ש. ל.

---

3. הראה כי ארבעת המספרים 13, 11, 7, 5 הם הרביעייה היחידה של מספרים ראשוניים, (כלומר, מן הצורה $p + 8$ , $p + 6$ , $p + 2$ , $p$) אשר הממוצע החשבוני שלה הוא ריבוע של מספר טבעי.

<u>הוכחה</u>

לפי הנתון: ( $n$ מספר טבעי):

$$\frac{p + (p + 2) + (p + 6) + (p + 8)}{4} = n^2$$

לאחר פתיחת סוגרים, כינוס וצמצום ב-4: $p + 4 = n^2$

$p$ מבוטא כאן כמכפלת שני גורמים: $p = n^2 - 4 = (n + 2)(n - 2)$

אך נתון כי $p$ ראשוני ולכן הגורם הקטן יותר יהיה 1: $n - 2 = 1$ .

מכאן $n = 3$ ו- $p = 3^2 - 4 = 5$ .

מ. ש. ל.