אכילס והצב

כשפוקעת סבלנותנו לנוכח הקשיים שנתקלים בהם תלמידנו, עלינו להזכיר לעצמנו, כי הרעיונות שאנו מצפים מהם להבין כיום, הטרידו את גדולי ההוגים של העבר. נושאים "פשוטים" כמו כפל שברים, או מספרים שליליים הם מושגים שפותחו במשך מאות רבות של שנים בטרם הפכו לנחלת רבים ואף בטרם הפכו לנחלת המשכילים.

במאמר זה נתאר את אחת מהבעיות שהטרידו את העולם העתיק. זנון (450 לפנה"ס) היה פילוסוף יווני, שניסה להראות את האבסורד בטעוניהם של מספר פילוסופים יוונים אחרים בעזרת הפרדוכס של "אכילס והצב". לפי האגדה, היה אכילס איש מלחמה מפורסם ואצן גדול. לפי המסורת, הצב הוא התגלמות האיטיות. מה יכול להיות מגוחך יותר ממצב בו האצן המהיר בעולם אינו יכול להדביק את האיטית בחיות? ובכל זאת, זו היא בדיוק טענתו של זנון בהציגו את הפרדוכס של אכילס והצב, ואלו נמוקיו:

נניח שאכילס והצב משתתפים בתחרות בה מקבל הצב יתרון בקו הזינוק. הם רצים בקו ישר. במצב הזינוק נמצא אכילס בנקודה A והצב בנקודה B

המרוץ נפתח! אכילס נושא את רגליו ואץ חיש קל מנקודה A ל-B במהירות גדולה בהרבה מזו של הצב. אך כשהוא מגיע לשם, הצב כבר איננו. אף כי מהירותו נמוכה בהרבה מזו של אכילס, הספיק בזמן זה להגיע לנקודה חדשה C .

המרוץ נמשך. אכילס אינו נופל ברוחו, וממהר מנקודה B לנקודה C בעקבות הצב, רק כדי לגלות שהצב איננו עוד ב- C, הוא כבר ב- D.

וכך הלאה! בכל פעם שמגיע אכילס לנקודה מסויימת, הוא מגלה שהצב כבר התקדם אל מעבר לה. כך אין אכילס מדביק את הצב לעולם.

ברור לכל, שכל הענין בטעות יסודו. אכילס ידביק את הצב, אם רק תמשך התחרות מספיק זמן. מה איפוא ההסבר?

אחת ההשגות המתבקשות ביותר כלפי הטעון הנ"ל הוא שהמרחקים $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ ... וכו' הולכים ומתקצרים בהתמדה, ואכילס אינו מסוגל פיסית לרוץ מרחקים קצרים יותר ויותר. אם למשל מקדים הצב את אכילס ב- 10 מטר, יכול אכילס לרוץ 10 מטר ועד אז ישיג אותו הצב במטר אחד נוסף. מרחק זה יכסה אכילס קל הרגלים בצעד אחד, אבל עד שיעשה זאת יעבור אותו הצב ב- 10 ס"מ נוספים. הבעיה מתחילה להסתבך, שכן כיצד יכול אכילס לרוץ 10 ס"מ?

אולם זאת היא רק השגה, אין היא פטורה מהפרדוכס, מאחר ואנו יכולים תמיד לבנות מודל מתמטי של אכילס והצב, שבו אפשר לתאר את אכילס רץ גם מרחקים של 1 ס"מ, 1 מ"מ וכו'. אנו נתבונן בפרדוכס בכמה אופנים, אולם ראשית, נתעלם ממנו לרגע, ונפתור את הבעיה. נמצא היכן משיג אכילס את הצב.

פתרון

המושגים הנזכרים: בנית מודל (תרגום לאלגברה); משוואות ליניאריות סימולטניות; פתרון גרפי. בכדי לבנות מודל מתמטי של התחרות, נשתמש בכמה מספרים. הערך הממשי של המספרים אינו בעל חשיבות: אפשר לבחור כל מערכת רצויה, כל עוד גדולה מהירותו של אכילס ממהירותו של הצב.

אנו מניחים:

1) אכילס רץ במהירות של 10 מטר לשניה, והצב במהירות של 1 מטר לשניה.

2) לצב יתרון מראש של 900 מטר.

בכל שניה מכסה אכילס 10 מטר. ב- x שניות ירוץ $10x$ מטר.

אם y המרחק (במטרים) שמכסה אכילס ב- x שניות, אזי

$$y = 10x$$

במושגים מתמטיים מצאנו יחס כמותי בין זמן ומרחק, ובטאנו אותו במשוואה $y = 10x$.

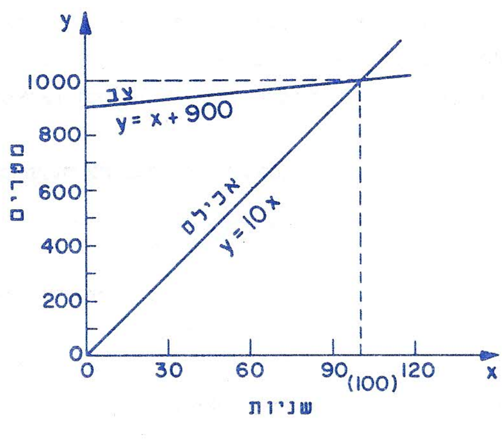
ועתה, מה בענין הצב? הוא איטי מאכילס. ב-x שניות, הוא זוחל x מטר לכן אם נייצג גם הפעם את המרחק שעובר הצב בעזרת y, נוכל לתאר את היחס בין מרחק ומהירות בעזרת $y = x$.

עתה יש לנו שתי משוואות. בטרם ניגש לפתרון, נבדוק את עצמנו שנית. בשתי המשוואות מייצג x את הזמן שעבר מאז ראשית התחרות. ואילו y מייצג שני גדלים שונים זה מזה; אחד הוא המרחק שכיסה אכילס, והשני - המרחק שעבר הצב. נקבע נקודת התיחסות אשר ממנה נמדוד כל מרחק ומרחק. נקודת המוצא A של אכילס נוחה ביותר לשמש נקודת התיחסות. לאחר x שניות, יהיה אכילס במרחק y מ- A, כאשר $y = 10x$ ובאותו זמן הצב שנמצא במרחק $y = x$ מ- B יהיה במרחק $y = 900 + x$ מ- A.

יש לשים לב שמרחק זה אינו המרחק שכיסה הצב בזחילתו. זהו המרחק שלו מ- A, כמו ה- y של אכילס.

עתה שה- x וה- y שניהם מוגדרים חד-משמעית, נוכל למצוא את קבוצת האמת של מערכת המשוואות שלנו.

במערכת צירים אחת, נשרטט את הקוים הישרים המתארים את המשוואות $y = 10x$ ו- $y = x + 900$. אם שני הקוים נחתכים, הרי אכילס ידביק את הצב בזמן ובמרחק מ- A שהם הקואורדינטות של נקודת החיתוך.



מאחר וקיימת נקודת חיתוך, (1000 , 100), מסתבר כי אכילס אכן ידביק את הצב, לאחר 100 שניות של ריצה בהן הספיק לכסות מרחק של 1000 מ׳.

<u>הערה:</u> יכולים היינו לפתור את מערכת המשוואות גם בצורה אלגברית.

דיון בפרדוכס

הפתרון לא שפך אור על התרת הפרדוכס. נתבונן איפוא בתחרות כפי שהיא מתוארת בפרדוכס, ונראה מה הקושי. בהצגת הפרדוכס, חולק המרוץ לשורה של קטעים:

אם נשתמש באותם המספרים שבחרנו בפתרון הראשון, נוכל לחשב את סדרת המרחקים

$$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, ...$$

אנו יודעים ש- AB הוא 900 מטר. אכילס, הרץ במהירות של 10 מ׳ לשניה, יכסה מרחק זה ב- 90 שניות; BC הוא איפוא המרחק שיכול הצב לעבור ב- 90 שניות. מאחר ומהירות הריצה שלו היא 1 מטר לשניה, הוא יתקדם כדי 90 מטר. וכן הלאה. כך מתקבלת הסדרה:

900 מ׳, 90 מ׳, 9 מ׳, 0.9 מ׳...

אכילס ירוץ איפוא לאורך סכום אברים אלה, או למרחק השווה

999.9999... מ׳

ופה טמון הסוד לפתרון הפרדוכס: מסתבר שבדרך בה תואר המרוץ, הגבלנו את אכילס למרחק של 999.9999... מ׳. אין פלא, איפוא, שאין הוא יכול להדביק את הצב. ברור כי במציאות יכול אכילס לרוץ כל מרחק שהוא, ואילו בתחרות זו, הוגבל.

בשעה שאכילס שם פעמיו להתגבר על סדרת המרחקים

$$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, ...$$

מקדיש הצב את מאמציו למרחקים

$$\overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, ...$$

וכך מכסה הצב

99.999... מ׳

ובתוספת 900 מ׳ שנתנו לו בהתחלת התחרות.

...999.999 מ׳

כדי למצוא כמה זמן נמשכה התחרות נחשב את סדרת מרווחי הזמן המתאימים לסדרת המרחקים, אנו מוצאים כי הסדרה היא

...0.9 שנ׳, 9 שנ׳, 90 שנ׳

וסה"כ הזמן הוא:

...99.999 שנ׳

במלים אחרות, הדרך בה תארנו את התחרות מגבילה את משך קיומה. אין פלא, איפוא שאכילס לעולם אינו מדביק את הצב! אם נתבונן עתה בערכי הזמן והמרחק, נראה כי שניהם מבוטאים כשברים עשרוניים המורכבים מסדרה אין סופית של הספרה 9, ושניהם מתקרבים לערכים שמצאנו עבור הנקודה שבה ידביק אכילס את הצב.

נשכח לרגע את סיפור התחרות, ונתבונן במספר העשרוני ...0.999

צורת הצגה אחרת של המספר היא $0.\dot{9}$

נייצג על ידי n את המספר $0.\dot{9}$

נשתמש בשיטה מקובלת מאוד, כדי למצוא שם אחר ל- n

$$n = 0.\dot{9}$$

לכן:

$$10n = 9.\dot{9}$$

נחסר את n מ-$10n$, $0.\dot{9}$ מ- $9.\dot{9}$ ונקבל:

$$9n = 9.0$$

ומכאן:

$$n = 1.0$$

כך אנו רואים שדרך אחרת לכתוב $999.\dot{9}$ מ׳ היא 1000 מטר, ודרך אחרת לכתוב $99.\dot{9}$ שנ׳ היא 100 שניות.

כך נפתר הפרדוכס. בעוד שהפרדוכס מניח כמובן מאליו כי יש לנו תחרות ללא הגבלות בין אכילס לבין הצב, הדרך בה הוא מוצג, מגבילה למעשה את התחרות לפרק זמן קטן מ- 100 שנ׳.

שים לב! אין אנו מעונינים במגבלה המעשית של ריצה מעין זו, אלא מעונינים בחוסר האפשרות המתמטית של חריגה מפרק הזמן של 100 שנ׳ (או מרחק של 1000 מ׳, לגבי אכילס) הנובע משיטה זו.

נקודת המבט היוונית

מה בעצם הטריד את היוונים?

האסכולה הפיתגורינית במיוחד, תפשה את החלל (למספרים היתה משמעות גיאומטרית) כמורכב מחלקיקים קטנים המהווים יחידות שאינן ניתנות לחלוקה נוספת. אמנם, כל אחד מקטעי הדרך העוקבים, שלאורכם רץ אכילס (או זחל הצב), צריכים היו להיות גדולים מיחידה ראשונית זו, שנקראה בפיהם מונד (Monad). אותה תפישה היתה קיימת גם ביחס לזמן. פרוש הדבר, כי המרחק שאכילס עובר, והזמן שבו הוא עושה זאת, גם בתנאים המשתמעים מתיאור התחרות, מורכבים שניהם ממספר אין סופי של מונדים. מאחר ששניהם אין סופיים, אין אף שלב בו ידביק אכילס את הצב.

זנון התכוון כנראה לקטרג על התפיסה ה"מונדית", אך לא היו לו המושגים והכלים המתמטיים להסבר הפרדוכס בצורה משכנעת. כיום, יש למתמטיקה כלים לטיפול בטורים אין סופיים כמו אלה המופיעים בפרדוכס וכן כלים למציאת סכום אברי הטור.

הסכום האין סופי

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + \ldots = 0.\dot{9} = 1$$

הוא דוגמה של סכום כללי יותר מהצורה:

$$a + ar + ar^2 + \ldots$$

(במקרה הפרטי $r = 0.1$ ו- $a = 0.9$)

סכום זה ידוע כטור גיאומטרי, והוא מוכר יפה כבר מספרי הלימוד הקלאסיים.

הצגה אחרת של הפרדוכס

נתאר לעצמנו שעון המראה את השעה 11.55. בשעה זו הזוית בין מחוג השעות לבין מחוג הדקות היא $27\frac{1}{2}°$. מחוג הדקות נע במהירות גדולה פי 12 ממחוג השעות. הוא "רודף" איפוא אחרי מחוג השעות. לכשיגיע מחוג הדקות למקומו של מחוג השעות ב- 11.55 ימצא שמחוג השעות כבר זז הלאה. וכך ממשיך מחוג הדקות את המרדף אך תמיד באותה תוצאה.

מחוג הדקות לא ידביק לעולם את מחוג השעות - לעולם לא יראה השעון את השעה 12.00 !

ברור כי הניתוח דומה לזה שבמקרה הקודם, אך המתמטיקה והגיאומטריה הכרוכות בו, עשויות להיות בעלות ענין מרובה.

הסיפור אודות אכילס והצב מזכיר לנו גם סיפור "חדיש" יותר.

נערה יפה יושבת בקצהו האחד של ספסל בגן ציבורי. נער היושב במרחק של 1 מטר ממנה על הספסל מתחיל להתקרב אליה, אך בשלבים, כך שבכל שלב הוא חוצה את המרחק ביניהם. התוצאה היא .... ובכן, התוצאה מובנת מאליה.