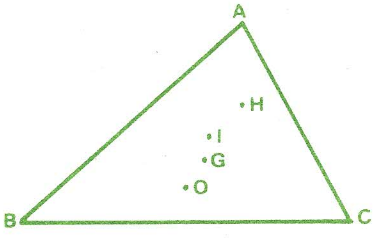
הקו של אוילר

הגיאומטריה האלמנטרית גדושה בתוצאות מפליאות, הטובעות לעיתים קרובות בנטיה נלהבת של הוכחת דברים לשמה.
הבה ונתעלם לרגע מנטייתנו להוכיח, ותחת זאת - נשרטט.

שרטט משולש (רצוי משולש גדול למדי)
העבר את תיכוני המשולש
שרטט את הגבהים שלו
שרטט את האנכים האמצעיים
שרטט את חוצי הזויות.

אם שרטוטך נקי ומדוייק, תמצא בודאי שבכל מקרה שרטטת שלושה קוים הנפגשים בנקודה. עובדה זו מרשימה ביותר.
מצאנו ארבע נקודות מיוחדות במשולש כלשהו.

מראה המשולש לאחר מחיקת קוי הבניה יהיה:

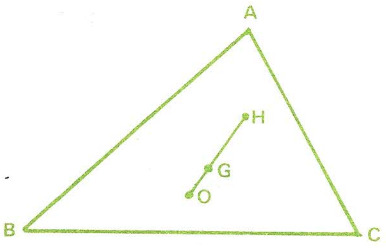


H - (חיתוך הגבהים)
I - (חיתוך חוצי הזויות)
G - (חיתוך התיכונים)
O - (חיתוך אנכים אמצעיים)

קיימים מקרים פרטיים בהן שתיים או יותר מתוך ארבע נקודות אלה מתלכדות. האם ישנם ישרים העוברים דרך חלק מהנקודות או דרך כל הנקודות?

מציאת ישר העובר דרך כל שתיים מהנקודות איננה מעוררת פליאה, אך בודאי נופתע אם נמצא ישר העובר דרך שלוש מהנקודות, ואם נמצא כי ארבע הנקודות מונחות כולן על קו ישר אחד יהיה זה מופלא עוד יותר.

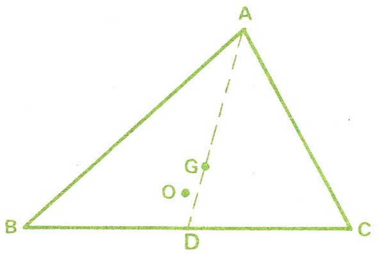
בשרטוט לעיל ארבע נקודות מיוחדות. האם קיימים ישרים מיוחדים הקשורים בנקודות אלו? חפש את התשובה בעזרת סרגל.



שרטוט מדוייק למדי ירמוז לנו ש- O, G ו-H הן קוליניאריות, ושלישיית נקודות אחרת מתוך הארבע אינה מקיימת תכונה זו.

השרטוט רמז לנו כי O, G ו-H הן קוליניאריות.

כדי להיות בטוחים כי לא עובי העפרון הוא המטעה אותנו, עלינו להוכיח מעבר לכל ספק כי קו מופלא זה אכן קיים. להלן נציג הוכחה הנראית לנו מענינת והנעזרת במושגים של טרנספורמציות בגיאומטריה.



תחילה נציג את הנחותינו:

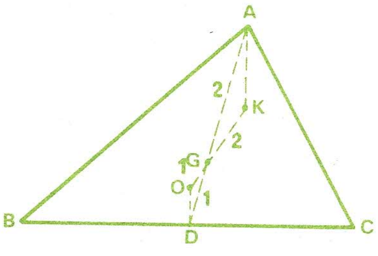
(1) נניח שקיום הנקודות O ו-G כבר הוכח*

(2) נניח שתיכוניו של משולש נחתכים בנקודה G כך ש- $\overline{AG}=2\overline{GD}$ **.

הבה נתאר בקצרה את שיטת ההוכחה. נבנה נקודה על הקו $\overline{OG}$, ונראה כי היא אכן נקודת החיתוך של גבהי המשולש. כלומר, נוכיח על ידי כך שני דברים:

(1) שלושת הגבהים של משולש נחתכים בנקודה.

(2) נקודות החיתוך של הגבהים, של התיכונים, ושל האנכים האמצעיים הן קוליניאריות.



ועתה ניגש להוכחה.

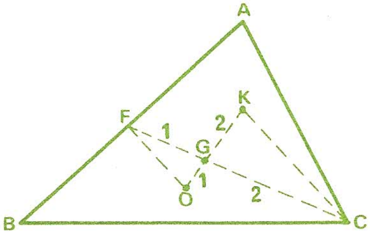
הצעד הראשון הוא ביצוע שיקוף פי 2 בנקודה G (הומותטיה ביחס -2 שמרכזה G)*** כפי שציינו לעיל $\overline{AG}=2\overline{GD}$ כך שטרנספורמציה זו מעבירה את D ל-A והנקודה O עוברת לנקודה K.

---

* פרקי מתמטיקה, הנדסה II, עמודים 89, 86

** פרקי מתמטיקה, הנדסה II, עמוד 89, תרגיל 7

*** פרקי מתמטיקה, הנדסה II, עמוד 34



מאחר וקטעים מועברים לקטעים****, $\overline{OD}$ עובר ל- $\overline{AK}$.

אנו יודעים גם כי קו ישר עובר לקו מקביל לו, ולכן $\overline{OD} \parallel \overline{AK}$. מאידך $OD \perp BC$ ולכן $AK \perp BC$
מכאן נובע כי $\overline{AK}$ הוא גובה במשולש $\triangle ABC$.

עתה נבחן את הנקודה K בשרטוט.

בדיוק אותו טיעון יראה, כי OF מקביל ל- CK ומכאן $\overline{CK}$ אף הוא גובה במשולש $\triangle ABC$. בדומה לכך גם $\overline{BK}$ הוא גובה, כך הראינו שהגבהים במשולש נפגשים בנקודה K ; ו- K היא הנקודה H שהגדרנו בראשית הדיון, ולכן O, G ו- H הן קוליניאריות.

אוילר גילה תכונה זו ב- 1765 ולכן נקרא הקו על שמו:
הקו של אוילר.

הערות

לתלמידים שאינם מכירים את המושג שיקוף או הומותטיה,
אפשר להוכיח באופן הבא:

$\frac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = 2$ (תכונה של תיכונים)

$\frac{\overline{KG}}{\overline{GO}} = 2$ (בנינו)

$\measuredangle OGD = \measuredangle KGA$ (זוית קודקודיות)

$\Leftarrow$ $\triangle DGO \sim \triangle AGK$ (משפט דמיון ראשון)

$\Leftarrow$ $\measuredangle DOG = \measuredangle GAK$ (זויות מתאימות במשולשים דומים)

$\Leftarrow$ $\overline{OD} \parallel \overline{AK}$ (כי מצאנו זוג זויות מתחלפות שוות)

ומאחר ו- $\overline{OD} \perp \overline{BC}$

$\Leftarrow$ $\overline{AK} \perp \overline{BC}$

כלומר, $\overline{AK}$ גובה במשולש $\triangle ABC$.

**** פרקי מתמטיקה, הנדסה II, עמוד 29