אלה תולדות π

I. מהו π?

π מוכר לכולנו כמספר עשרוני.

$$\pi = 3.14159...$$

אם נחפש, נמצא בספרים ספרות נוספות על אלו הרשומות לעיל. צורתו העשרונית של π חושבה עד לדיוק של כחצי מליון ספרות אחרי הנקודה העשרונית, וקיימות אינסוף ספרות נוספות.

לפי הידוע כיום הפיתגורינים (500-300 לפנה"ס) היו בין הראשונים אשר בעיה זו הטרידה אותם. קיימים מספרים רבים דוגמת π שאינם ניתנים לייצוג כשבר עשרוני סופי.

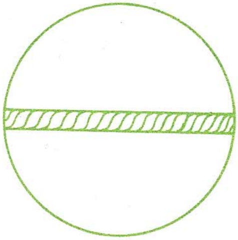
דוגמא: נתון ריבוע שאורך צלעו מספר יחידות כלשהו, a - ייצג אורך זה. אורך האלכסון שלו ייוצג איפוא בעזרת $a\sqrt{2}$, אשר אינו ניתן לייצוג על-ידי שבר עשרוני סופי, כי:

$$\sqrt{2} = 1.414...$$

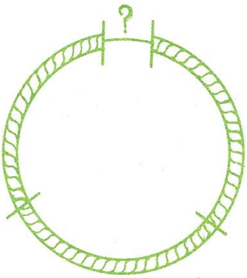
עד כמה שידוע לנו, טרם חישב איש את המספר $\sqrt{2}$ עד דיוק של חצי מליון מקומות עשרוניים. $\sqrt{2}$ הוא אחד מפתרונות המשוואה $x^2 - 2 = 0$ אשר מקדמיה מספרים רציונליים. האם אתה מכיר משוואה שמקדמיה רציונליים ו-π פתרון שלה? $\sqrt{2}$ מופיע כפי שראינו בהקשר לאלכסון ריבוע. באיזה הקשר מופיע π?

π הוא היחס בין היקף המעגל וקוטרו. האם תוכל להוכיח זאת?

II. קדמוניות π

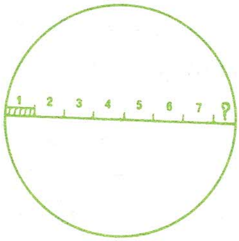


בראשית ההיסטוריה הכתובה אנו מוצאים כי הבבלים והמצרים התענינו בנושאים מתמטיים. היחס הקבוע בין היקף המעגל (H) לבין קוטרו (K) עורר את סקרנותם. למעשה חישבו את ערכו של יחס זה. הערכים שנתקבלו בתקופה העתיקה עבור יחס זה – π, היו: 3, $3\frac{1}{7}$, $3\frac{1}{8}$.

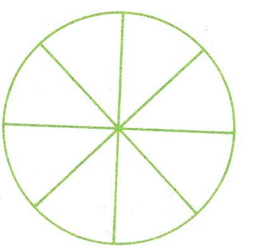


בנוסף לכך מסתבר שהם שמו לבם גם לעובדה, שהיחס בין שטח מעגל לבין ריבוע הרדיוס שלו, אף הוא שווה ל- π.

עתה אפשר רק לנחש כיצד הגיעו למסקנות אלו ובאילו שיטות חישבו את π. ישנן כמה השערות מענינות: נוכל לתאר לעצמנו כי שרטטו מעגל בחול, ואז ניסו להקיף אותו בחבל שאורכו כקוטר המעגל. לאחר שהניחו את החבל 3 פעמים נשאר עדיין חלק קטן מההיקף בלתי מכוסה. חלק זה אפשר היה להניח ליד החבל שאורכו כאורך הקוטר כ- 7 או 8 פעמים בערך. בהתחשב במכשירי המדידה ובחומרי העבודה, היו מדידות אלה מדוייקות למדי.

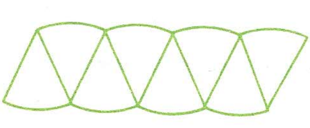


בהקשר לשטח המעגל, קיימות תעודות מאוחרות מאד, המרמזות על החומר המקורי בו השתמשו אנשי העולם העתיק. לפיהן אפשר לחשב את השטח כך:



נחלק את המעגל למספר גזרות שוות (נאמר 8)
עתה נרכיב גזרות אלה מחדש כך:

אמת, זו אינה מקבילית מדוייקת אך במקורב יהא אורך הבסיס $\frac{H}{2}$. המרחק בין המקבילים הוא $R = \frac{K}{2}$. השטח הוא, איפוא $\frac{H}{2} \times R$



מכאן:

$$\frac{\text{שטח}}{R^2} = \frac{\frac{H}{2} \cdot R}{R^2} = \frac{H}{2R} = \frac{H}{K} = \pi$$

II. השם π, וערכו

אם נאמר כי π הוא היחס בין היקף המעגל לקוטרו, נראה כי אנשי העולם העתיק ידעו על π, אף כי לא סמנו אותו באות π.

היחס נכתב במלים: $\frac{\text{היקף}}{\text{קוטר}}$

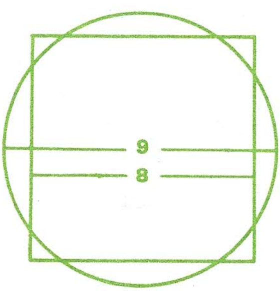
ביוונית המלה היקף היא περιφερια. האות הראשונה היא איפוא π. בסביבות המאה ה- 17 מוצאים עדיין בכתובים גם סימונים אחרים.

משנת 1737, שנה בה השתמש המתמטיקאי אוילר בסימן π הפך סימן זה להיות מקובל על הכל.

הזכרנו כבר את הערכים שהיו מקובלים בעולם העתיק. בחישוב π, עתה נסקור שיטות בהן חושב π שהן בעלות ענין מרובה.

א. המצרים

חישוב π מופיע באחת התעודות המתמטיות העתיקות ביותר; הפפירוס של אחמס (1700–1550 לפנה"ס), בו הועלתה הבעיה הבאה:



נתונה חלקה שצורתה מעגל וקוטרה 9 יחידות. מה שטחה?

אחמס מציג את הפתרון הבא:

חסר מן הקוטר את חלקו התשיעי ובנה ריבוע על חלקו הנותר של הקוטר. הריבוע יהיה שקול לעיגול. או, בשפה מודרנית, שטח המעגל שווה לשטח הריבוע הבנוי על 8/9 מקוטרו.

איזה ערך של π אנו מקבלים כאן?

נחשב זאת:

יהא השטח S, הקוטר K, הרדיוס R. אזי:

$$S = (K-\frac{K}{9})^2 = K^2(1-\frac{1}{9})^2 = (2R)^2(\frac{8}{9})^2$$

$$S = 4R^2\,\frac{64}{81} = R^2\,\frac{256}{81}$$

ומכאן:

$$\pi = \frac{256}{81} = 3.1605$$

יש לציין כי לא ידוע אם המצרים היו סבורים כי שטח העיגול שחישבו בדרך הנ"ל מדוייק.

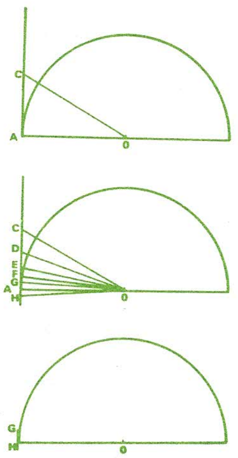
ב. העברים הקדמונים

על הערך 3 עבור π כבר נרמז בציטוט הבא מדברי הימים ב' ד/ב:

"ויעש את הים מוצק עשר באמה משפתו עד שפתו עיגול סביב, וחמש באמה קומתו, וקו שלושים באמה יסוב אותו סביב". (הים במקדש שלמה).

הערך 3 הנקוב כאן עבור π, השפיע כנראה על עורכי המשנה והתלמוד, מאחר וגם הם רשמו ערך זה, וזאת אף על פי שערכים מדויקים הרבה יותר, כגון $3\frac{1}{7}$ היו ידועים היטב בתקופתם (ראה מסכת מידות).

ג. ארכימדס



ארכימדס המדען היווני (287-212 לפנה"ס) הוא האיש שתרם תרומה מכרעת לחישוב π. הוא פיתח שיטה שבעזרתה אפשר לחשב את π בצורה מדויקת כרצוננו בתנאי שנאריך ימים ושנים! הוא עצמו עסק בחישובים המייגעים עד שהגיע לערך $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. בספרו "מדידת העיגול" השתמש ארכימדס בשיטות שהיו ידועות כבר אז, לחישוב היקפים של מצולעים חוסמים וחסומים. על ידי השוואת ההיקפים של פוליגונים בעלי 6, 12, 24, 48, ולבסוף 96 צלעות, הצליח "לכלוא" את המעגל ויכול היה לחשב את ערכו של π בדיוק הולך ורב מפעם לפעם.

כיצד בנה ארכימדס פוליגונים אלה?

על שאלה זו מנסה לענות T.L. Heath בצורה הבאה:

ראשית, לקח ארכימדס את המקרה של פוליגון חוסם. (ראה שרטוט) CA המשיק ב-A לקשת מעגלית בעלת מרכז O. הזוית AOC שווה לשליש של זוית ישרה. OD חוצה הזוית AOC, OE חוצה הזוית AOD, OF חוצה

ומכאן:

$$\pi = \frac{256}{81} = 3.1605$$

יש לציין כי לא ידוע אם המצרים היו סבורים כי שטח העיגול שחישבו בדרך הנ"ל מדוייק.

ב. העברים הקדמונים

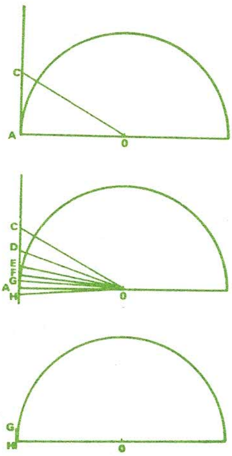
על הערך 3 עבור π כבר נרמז בציטוט הבא מדברי הימים ב' ד/ב:

"ויעש את הים מוצק עשר באמה משפתו עד שפתו עיגול סביב, וחמש באמה קומתו, וקו שלושים באמה יסוב אותו סביב". (הים במקדש שלמה).

הערך 3 הנקוב כאן עבור π, השפיע כנראה על עורכי המשנה והתלמוד, מאחר וגם הם רשמו ערך זה, וזאת אף על פי שערכים מדויקים הרבה יותר, כגון $3\frac{1}{7}$ היו ידועים היטב בתקופתם (ראה מסכת מידות).

ג. ארכימדס

ארכימדס המדען היווני (212-287 לפנה"ס) הוא האיש שתרם תרומה מכרעת לחישוב π. הוא פיתח שיטה שבעזרתה אפשר לחשב את π בצורה מדויקת כרצוננו בתנאי שנאריך ימים ושנים! הוא עצמו עסק בחישובים המייגעים עד שהגיע לערך $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. בספרו "מדידת העיגול" השתמש ארכימדס בשיטות שהיו ידועות כבר אז, לחישוב היקפים של מצולעים חוסמים וחסומים. על ידי השוואת ההיקפים של פוליגונים בעלי 6, 12, 24, 48, ולבסוף 96 צלעות, הצליח "לכלוא" את המעגל ויכול היה לחשב את ערכו של π בדיוק הולך ורב מפעם לפעם.

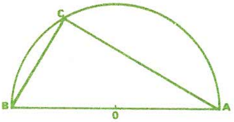


כיצד בנה ארכימדס פוליגונים אלה?

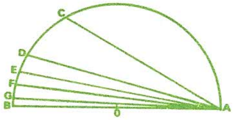
על שאלה זו מנסה לענות T.L. Heath בצורה הבאה:

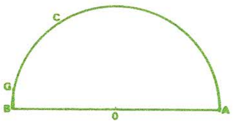
ראשית, לקח ארכימדס את המקרה של פוליגון חוסם. (ראה שרטוט).CA המשיק ב-A לקשת מעגלית בעלת מרכז 0 . הזוית AOC שווה לשליש של זוית ישרה. OD חוצה הזוית AOC , OE חוצה הזוית AOD , OF חוצה

הזוית AOE, ו- OG חוצה הזוית AOF, AG מועתק מהנקודה A כך ש- AH = AG . הזוית GOH שווה איפוא לזוית FOA שהיא $1/24$ מזוית ישרה ו-GH הוא צלע של מצולע משוכלל חוסם בן 96 צלעות.



לגבי המצולע החסום : ... ABC חצי מעגל והזוית BAC שווה למחצית הזוית הישרה. אם AD חוצה את הזוית BAC, AE חוצה את הזוית BAD, AF חוצה את הזוית BAE, ו- AG חוצה את הזוית BAF, אז הקטע BG הוא צלע במצולע משוכלל חסום בעל 96 צלעות.*





ד. בתקופה המודרנית

בשיטתו של ארכימדס השתמשו במשך מאות רבות של שנים. אנשים רבים השקיעו זמן רב בחישוב ערכו של π . האחרון לארכימדיאנים היה כנראה ההולנדי לודולף פון ציילן Ludolph van Ceulen (1539-1610 לסה"נ), שהשתמש במצולע בעל 6×2^{29} צלעות וחישב בעזרתו את π בדיוק של 20 ספרות אחרי הנקודה העשרונית. מאוחר יותר, שיפר תוצאה זו והגיע לדיוק של 35 ספרות אחרי הנקודה העשרונית. מיד עם הופעת החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי במאה ה- 17, הורכבו "נוסחאות אין-סופיות" עבור π . יש מספר עצום של נוסחאות כאלה, ואנו נביא מספר דוגמאות:

ג'ון ווליס (John Wallis)
1616-1703

$$\pi = 2 \times \frac{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\ldots}$$

לורד ברונקר (Lord Brouncker)
c.1620-1684

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2+\ldots\ldots}}}$$

ליבניץ (Leibniz)
1646-1716

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\right)$$

ניוטון (Newton)
1642-1727

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^7} - \ldots\right)$$

אוילר (Euler)
1707-1783

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

---

* T.L. Heath, A History of Greek Mathematics, Vol. II, pp. 52-53.

לעומת החישובים של ארכימדס ויורשיו שהיו כרוכים ביגיעה רבה והציעו רק קרובים ל- π , היוו נוסחאות אלה ביטוי מדוייק של π . נוסחאות אלה אינן פותרות את בעית חישוב ערכו המספרי של π , ניתן להשוות ביניהן על פי כמות העבודה הדרושה לחישובו עד מספר מסויים של ספרות אחרי הנקודה העשרונית. הטור האין-סופי של ליבניץ הוא כמעט חסר תועלת: שימוש ב- 300 אברים עדיין לא יביא לדיוק של 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית, בעוד שבטור של ניוטון די ב- 22 אברים כדי לחשב את π עד דיוק של 15 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

כיום התקצר לאין ערוך זמן החישוב של ערכי π . ב- 1967 חישבו את ערכו של π עד הספרה ה- 500,000 אחרי הנקודה העשרונית בעזרת מחשב.

ה. מהו π ?

ראינו שימי הטיפול בחישוב π , הם כימי ההיסטוריה הרשומה של המתמטיקה. הטיפול נמשך גם במאה שלנו.
מדוע? סקרנות מתמטית היא ללא ספק גורם מכריע.
בתקופה מאוחרת נוספה לכך גם סקרנות בדבר מהותו של π;
א) האם π מספר רציונלי ואולי אי-רציונלי?
ב) אם π אי-רציונלי האם גם הוא כמו $\sqrt{2}$ מהווה פתרון של משוואה ואולי לא?

בקשר לשאלה הראשונה הראו למברט (Lambert) ולג'נדר (Legendre) לקראת סוף המאה ה- 18 כי המספר π בדומה ל- $\sqrt{2}$ הוא אי-רציונלי, אך בניגוד ל- $\sqrt{2}$, שריבועו מספר רציונלי, π^2 אף הוא אי-רציונלי, כלומר π אינו שורש שני של גודל רציונלי.

לפני שנדון בשאלה השניה נזכיר את המושג: מספרים אלגבריים.
מספר אלגברי הוא פתרון משוואה פולינומית מהצורה:

$$ax^n + bx^{n-1} + \dots + px + q = 0$$

כאשר $n, a, b, \dots, p$ ו-q הם מספרים שלמים.

כל מספר רציונלי ואף חלק מהמספרים האי-רציונליים (כמו $\sqrt{2}$) הם מספרים אלגבריים.

נשאלת השאלה: האם קיימים מספרים שאינם אלגבריים?

ב- 1844 הוכיח ליוויל (Liouville) כי מספרים כאלה אכן קיימים. כתוצאה מכך הצליחו להוכיח כי קיימים מספרים לא-אלגבריים במספר רב יותר ממספרים אלגבריים, מאחר ושתי הקבוצות הן אין-סופיות, יש לעמוד על משמעות של "יותר" זה, אך לא כאן הוא המקום.
המספרים הלא-אלגבריים מכונים טרנצנדנטיים.

ומה בדבר π ?

ב- 1882 בעקבות עבודה רבה של ליוויל (Liouville) והרמית (Hermite) הוכיח לינדמן (Lindemann) כי הוא מספר טרנצנדנטי.

ו. "מרבעי העיגול"

בעיה עתיקה כמעט כמו זו של π עצמו, היא הבעיה הקלאסית של "תרבוע העיגול". בעיה זו היתה אחד הדחפים לחקר הנמרץ של תכונות π . המשחק וכלליו הם כדלהלן: "בנה ריבוע שווה בשטחו למעגל נתון, תוך שימוש בכלים האוקלידיים, דהיינו: סרגל ומחוגה בלבד".

ההיסטוריה של המתמטיקה עמוסה ב"מרבעי עיגולים".
ב- 1775 קיבלה האקדמיה הפריזאית החלטה לא לבדוק כל הצעות חדשות לפתרון הבעיה, ולא מפני שכבר נפתרה: פשוט, מספר הפתרונות המדומים היה גדול מדי. אפשר להראות, שאם ניתן לרבע את העיגול, אזי מוכרח π להיות פתרון של משוואה פולינומית. ולכן עבודתו של לינדמן הנזכרת לעיל הביסה סופית את מרבעי העיגולים. ברם, הם קיבלו את תבוסתם ברוח רעה, כפי שמספר בקמן(Beckman) בתיאורו החי, "ההיסטוריה של π" ("A History of π").
הוא מצטט את שוברט (המתמטיקאי - לא הקומפוזיטור):
"גזע מרבעי המעגל לא יעבור מן הארץ כל עוד עושות הבורות ורדיפת הכבוד יד אחת".

כדוגמא לחברת אוילים בלתי שפויה זו, אנו מביאים את המקרה הבא:

ב- 1897, היה נסיון של בית הנבחרים במדינת אינדיאנה בארה"ב לרבע את העיגול באמצעות חוקה מתאימה. החוק המוצע הניח, שאם היקף העיגול שווה להיקף הריבוע, חייבים שטחיהם להיות שווים. יותר מכך; אם היקף העיגול הוא C, שטחו הוא $(\frac{C}{4})^2$. זה מביא אותנו לערך המגוחך: $\pi = 4$!

ז. נקודת מבט אחרת על π ; מחט בופון (Buffon)

אף כי לא נטעה הרבה אם נניח שבעית π החלה עם גלוי המעגל, אל לנו לשכוח כי π מופיע גם בהקשרים אחרים. π נפוץ במתמטיקה, פיזיקה וכו׳. אחד מהגילויים המפתיעים ביותר לגבי π הוא נסיון הניתן לביצוע והקשור בתורת ההסתברות:

נתונים מחט (או מקל קצר), ומשטח מרוצף. יהא ℓ אורך המחט, ו-a רוחב טור מרצפות, כאשר $\ell < a$. נסתכל על המשטח כמורכב מטורי מרצפות, כמו ניר מודפס בשורות, ונתעלם מהחלוקה למרצפות בתוך כל טור. נניח עתה למחט לפול על המשטח. המחט תפול כולה בתוך טור אחד, או על הקו המפריד בין שני טורים.

ב- 1777 הציע הרוזן דה-בופון (Comte de Buffon) משחק זה אשר לכאורה אין בו תכלית. והוכח כי ההסתברות p שהמחט תפול על הקו המפריד היא

$$p = \frac{2\ell}{\pi a}$$

בספר שפרסם ב- 1812, הכליל לפלס (Laplace) את בעייתו של בופון לשתי קבוצות של קוים ניצבים זה לזה בדומה לרצפה מרוצפת. במקרה המיוחד בו המרחקים בין הקוים המקבילים בכל קבוצה שווים, אנו מקבלים:

$$p = \frac{4a\ell - \ell^2}{\pi a^2}$$

הוא הציע להשתמש בתוצאה זו כדי לחשב את π . אף כי אין זה יעיל ביותר, זה נסיון שכל אחד יכול לבצע, שכן כל הציוד הדרוש מסתכם במחט, משטח מרוצף וסבלנות.