שבבי שבבים

הערה למאמר "סדרות Farey"

מאת: שמואל אביטל
הטכניון חיפה

בשבבים, תיק מס' 18 התפרסם מאמר מקיף ומעניין בשם "סדרות Farey" מאת כרמית ברקת.
נראה לי רצוי להוסיף משפט אחד, הפותח פתח להכרת הפונקציה $\varphi(n)$ (הפונקציה של אוילר), שהיא בעלת חשיבות ראשונית בתורת המספרים.

נשאלת השאלה: כמה מספרים מתווספים לסידרת Farey, כאשר עוברים מן המכנה n-1 למכנה n? במלים אחרות:
מהו ההפרש בין מספר האיברים ב F_n לבין מספר האיברים ב F_{n-1}?

ניתוח קל מגלה כי במעבר זה יכולים להתווסף רק שברים <u>מצומצמים</u> שמכניהם n, כי כל שבר המופיע ב F_n, שמכנהו קטן מ n, מוכרח היה להופיע כבר בסידרה קודמת.

אילו הם השברים המצומצמים בסידרה F_n שמכניהם n? הווה אומר, אותם השברים שלמוניהם אין מחלק משותף, גדול מ 1, עם המכנה n. או במלים אחרות: השברים שמוניהם זרים למכנה n.

מתקבל שמספר השברים המתווספים במעבר מ F_{n-1} ל F_n, שווה למספר המספרים הטבעיים הקטנים מ n וזרים לו. מספר זה מסומן בדרך כלל כ $\varphi(n)$.

מכאן נוכל לקבל את המשפט:

מספר האיברים ב- F_1 הוא 2 ($\frac{0}{1}$ ו $\frac{1}{1}$)

ומספר האיברים ב- F_n, עבור $n > 1$, הוא $\sum_{k=2}^{n}\varphi(k) + 2$

לדוגמה: מספר האיברים ב F_1 הוא 2

מספר האיברים ב F_2 הוא $\varphi(2) + 2 = 1+2 = 3$

מספר האיברים ב F_3 הוא $\varphi(2) + \varphi(3) + 2 = 1+2+2 = 5$

מספר האיברים ב F_4 הוא $\varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + 2 = 1+2+2+2 = 7$

מהו המספר? - זהו המספר!

מאת: אברהם הרכבי
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

בשבבי שבבים, כרך ו' תיק מס' 18, הופיעה השאלה:

לפניך מספר בן 9 ספרות: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$

המקיים כי לכל $i \neq j$, $a_i \neq a_j$ ולכל i, $a_i \neq 0$.

(הסימון: $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ פירושו: $a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_n$).

א) מצא את המספר אם ידוע כי לכל $1 < n \leq 9$ $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ מתחלק ב n.

ב) האם מספר זה יחיד?

ג) מהו המספר אם ידוע כי לכל $1 < n \leq 9$ $\overline{a_n\ldots a_2a_1}$ מתחלק ב n?

הפתרון המוצע להלן, נעזר בסימני התחלקות ובבדיקת כל האפשרויות.

א) נעשה זאת כך:

1. "אם סכום הספרות של מספר הוא 9 או כפולה של 9, אזי המספר מתחלק ב 9". סימן התחלקות זה מתקיים במקרה שלנו, ואינו מכתיב אילוץ להתחלת הפתרון.

i זוגי (אי-זוגי) $\Leftarrow$ a_i זוגי (אי-זוגי)

2. a_2, a_4, a_6 ו a_8 חייבים להיות זוגיים. לכן חמש הספרות הנותרות תהיינה אי-זוגיות.

$a_5 = 5$

3. כדי ש: $\overline{a_1\ldots a_5}$ יתחלק ב 5, צריך להתקיים $a_5 = 5$ (כזכור $a_i \neq 0$).

$a_4 = 2$
או
$a_4 = 6$

4. מכיוון ש: $\overline{a_1\ldots a_4}$ צריך להתחלק ב 4, $\overline{a_3a_4}$ חייב להיות כפולה של 4 (סימן התחלקות ב 4). אבל a_3 הוא אי-זוגי ולכן a_4 יהיה 2 או 6.

$\overline{a_4a_5a_6} = 258$
או:
$\overline{a_4a_5a_6} = 654$

5. $\overline{a_1\ldots a_6}$ יתחלק ב 6 אם ורק אם הוא יתחלק ב 2 וב 3. בדקנו התחלקות ב 2, נותר לנו לבדוק התחלקות ב 3: כיוון ש $\overline{a_1a_2a_3}$ מתחלק ב 3, גם $\overline{a_4a_5a_6}$ יתחלק ב 3. ולכן $\overline{a_4a_5a_6}$ יהיה 258 או 654.

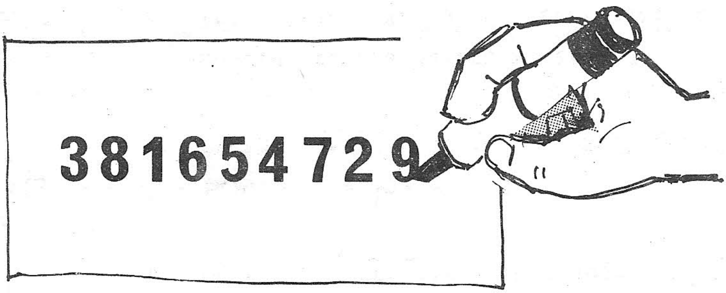
6. נבדוק את האפשרות $\overline{a_4a_5a_6} = 258$. מכיוון ש $\overline{a_1\ldots a_8}$ חייב להתחלק ב 8, $\overline{a_6a_7a_8}$ יתחלק ב 8 (סימן התחלקות ב 8). זה מביא אותנו לבדוק את כל הכפולות בין 800 ל 900. ניפוי הכפולות הלא מתאימות יוביל אותנו לשתי אפשרויות: 816 ו 896.

$\overline{a_4a_5a_6} = 654$

במקרה הראשון, בדיקת כל האפשרויות נותנת כי $\overline{a_1a_2a_3}$ אינו מתחלק ב 3. במקרה השני נקבל כי $\overline{a_1\ldots a_7}$ אינו מתחלק ב 7. (מומלץ לקורא לעבור על כל האפשרויות, בשלב הזה ובשלב הבא). לכן $\overline{a_4a_5a_6} = 654$.

7. $\overline{a_4a_5a_6} = 654$. נחזור על התהליך שפורט בסעיף 6.
ניווכח לדעת כי נוכל להרכיב רק מספר אחד שמקיים את התנאים המבוקשים. מספר זה, הוא:

המספר הוא:
381654729



ב) דרך מציאת המספר מוליכה אותנו למסקנה כי המספר שמצאנו הינו היחיד המקיים את הנדרש.

ג) לא ניתן להרכיב מספר כזה; כי למשל:
במקרה של $\overline{a_2a_1}$, a_1 חייב להיות זוגי,אך במקרה $\overline{a_5\ldots a_1}$, a_1 חייב להיות 5 $(a_i \neq 0)$.