כיצד פותר אלחואריזמי משוואות רבועיות

מאת: תופיק קרמאן [1]
בית הספר התיכון - אום אל פחם

אלחואריזמי היה מתמטיקאי ערבי, שחי בבגדאד במאה התשיעית. הוא ידוע כאחד התורמים לבנית יסודות האלגברה.

אלחואריזמי כתב את הספר *אלג'בר ואלמוקאבלה* [2]. המלה "אלג'בר", שעל פיה נקרא הספר, שימשה את אלחואריזמי לתיאור הפעולה של העברת איברים מאגף לאגף במשוואה. המלה השניה "אלמוקאבלה", שימשה את אלחואריזמי לתיאור פעולת כינוס האיברים הדומים. המלה "אלג'בר" נשתמרה עד היום וממנה - אלגברה.

בספרו מתאר אלחואריזמי דרך מענינת לפתרון משוואה ריבועית, השקולה לדרך ההשלמה לריבוע. כדוגמא הוא פותר את המשוואה $x^2 + 10x = 39$.

א. $x^2 + 10x = 39$

נתמקד תחילה באגף השמאלי של המשוואה. x^2 מייצג את שטחו של ריבוע אשר צלעו x (הריבוע ABCD בשרטוט 1). את האיבר $10x$ נוכל לקבל בדרך הבאה: נאריך כל אחת מצלעות הריבוע, בשני הקצוות, באורך 2.5 (מספר זה מתקבל כאשר נחלק 10 ב 4, כלומר, $2.5 = \frac{10}{4}$). נשרטט 4 מלבנים אשר שטחו של כל אחד מהם $2.5x$. שטח ארבעתם יהיה כמובן $10x$. שטח הריבוע והמלבנים הוא, איפוא, $x^2 + 10x$. ביטוי זה הוא האגף השמאלי של המשוואה, ולכן שווה אף הוא ל 39.

נבנה ארבעה ריבועים על צלעות המלבנים בעלי אורך 2.5. שטחו של כל אחד מארבעת הריבועים הוא 6.25 וסכום שטחיהם 25. נוסיף את שטחי הריבועים הללו לשטח הצורה שקיבלנו קודם. נקבל ריבוע ששטחו $64 = 25 + 39$, כלומר, צלע הריבוע החדש הוא 8. כדי למצוא את אורך צלע הריבוע ממנו יצאנו, עלינו לחסר את התוספת לצלע שהיא $2.5 \cdot 2$ (זכור! הארכנו כל צלע בשני קצותיה ב 2.5). מצאנו, איפוא, שצלע הריבוע ממנו יצאנו היא 3 $(x = 8 - 5)$, וזהו פתרון המשוואה הריבועית שלנו.

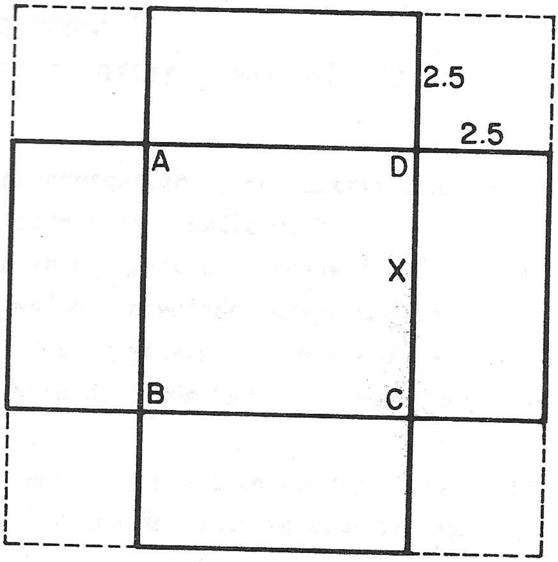
---

[1] אני מודה לפרופ' שמואל אביטל שעודד אותי לכתוב רשימה זו.

[2] הספר שבידי יצא לאור בשנת 1968, והוא העתק מכתב יד שנכתב במאה הארבע עשרה במצרים, ונמצא בספרית בודלין שבאוקספורד.

בכתיב מתמטי - סימבולי ייראה פתרונו של אלחואריזמי כך:

$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{4}\right)^2 \cdot 4 + 39} - \frac{10}{2}$$

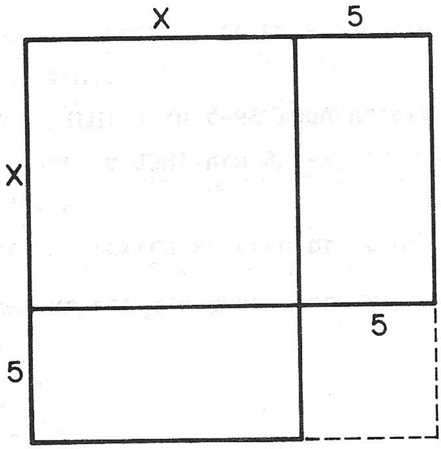


שרטוט 1

אלחואריזמי לא טיפל בשורש השני, השלילי, של המשוואה, כיוון שהוא לא השתמש במספרים שליליים.

לדעתי, כדאי להראות דוגמא של דרך פתרון כזו לתלמידים, כדי לקרב אותם אל מושג ההשלמה לריבוע ולהמחישו להם. אפשר לעשות זאת גם בצורה פשוטה יותר (גם אותה הראה אלחואריזמי בספרו). דרך זו מוצגת בשרטוט 2. היא מבוססת על הוספת שני מלבנים, ששטח כל אחד מהם $5x$ לשתי צלעות שכנות של הריבוע x^2. שטח הצורה המורכבת מהריבוע ושני המלבנים הוא $x^2 + 5x + 5x = x^2 + 10x$ ולפי המשוואה הנתונה, שווה ביטוי זה ל 39. בפינה של הצורה הנ"ל נבנה ריבוע ששטחו 25. ריבוע זה משלים את הצורה שקיבלנו לריבוע ששטחו $64 = 25 + 39$. מכאן, אורך צלעו 8, ולכן $x = 8 - 5 = 3$. זהו פתרון המשוואה ובצורה אלגברית מודרנית:

$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39} - \frac{10}{2}.$$



שרטוט 2

כיצד היה פותר אלחואריזמי את המשוואה: $x^2 - 10x = 39$?

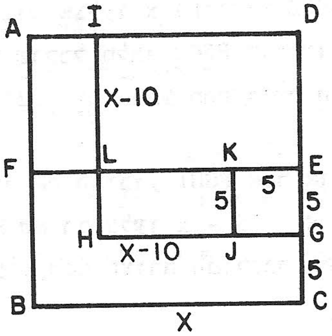
הוא היה מעביר את המשוואה לצורה השקולה $x^2 = 39 + 10x$ ופותר אותה.
(בספר פותר אלחואריזמי את המשוואה: $x^2 = 3x + 4$).

ב. $x^2 = 39 + 10x$

האגף השמאלי של המשוואה, x^2, מייצג שטחו של ריבוע שצלעו x (הריבוע ABCD בשרטוט 3).

נעבור לאגף הימני. האיבר 10x יתקבל באופן הבא: נקצה קטע CE באורך 10 על אחת מצלעות הריבוע ABCD. בשרטוט - על הצלע CD ‏$(x > 10)$. נעביר דרך E מקביל ל-BC, כך שיווצר מלבן FBCE ששטחו 10x.
השטח הנותר, שטח המלבן AFED, משלים את 10x ל-x^2, ולכן שווה ל-39.

נסמן ב-G את אמצע הקטע CE. מ-G נעביר קטע GH כך ש- $BC \parallel GH$ ו- $DG = GH = x - 5$.
נבנה את הריבוע IHGD שאורך צלעו $x - 5$.



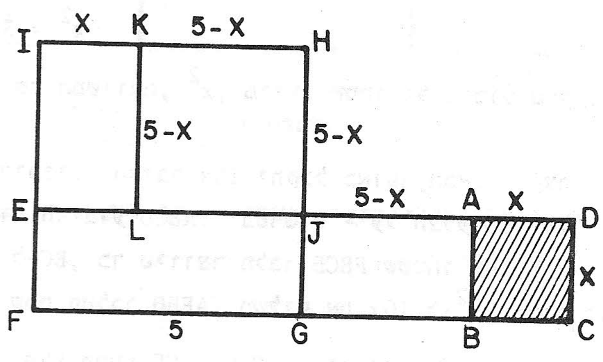
שרטוט 3

על GH נקצה קטע GJ שאורכו 5, ונבנה את הריבוע KJGE. קל להוכיח שהמלבן AFLI חופף למלבן LHJK.
לכן, שטח הצורה IHJKED שווה ל-39 ושטח הריבוע IHGD שווה $39 + 25 = 64$.
מכאן, אורך צלע הריבוע IHGD הוא 8, ו-x, שהוא אורך צלע הריבוע ABCD, שווה ל- $8 + 5 = 13$.
זהו פתרון המשוואה, ובצורה אלגברית מודרנית: $x = \frac{10}{2} + \sqrt{39 + (\frac{10}{2})^2}$.

סוג נוסף של משוואה ריבועית שמציג אלחואריזמי, היא משוואה מהצורה: $x^2 + 21 = 10x$.

ג. $x^2 + 21 = 10x$.

אלחואריזמי שם לב לעובדה, שלמשוואה זו יתכנו שני פתרונות (חיוביים). משום כך, הוא מבחין בין שתי אפשרויות בבואו לפתור אותה: אפשרות אחת שהפתרון, x, קטן מחצי המקדם של x, ואפשרות שניה שהפתרון, x, גדול מחצי המקדם של x. נטפל תחילה באפשרות ש-x קטן מחצי המקדם שלו. כלומר, $x < 5$.



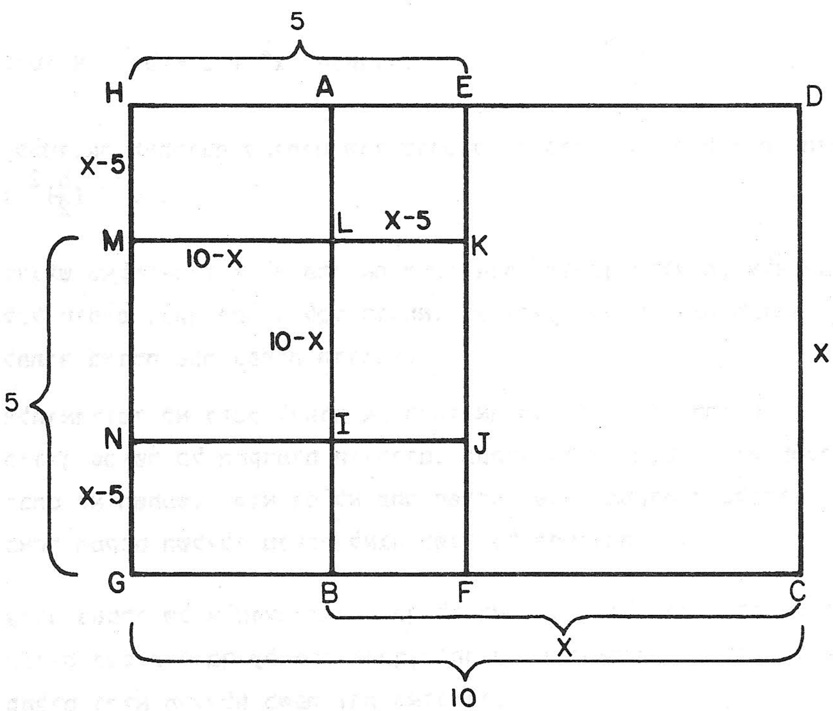
שרטוט 4

x^2 מייצג שטחו של ריבוע שצלעו x (הריבוע ABCD בשרטוט 4). נמשיך את צלעותיו AD ו BC, כך שנקבל מלבן EFCD שאורכו 10, רוחבו x ושטחו 10x. שטח המלבן EFBA הוא 21. זה נובע מהמשוואה הנתונה.

תהי G אמצע FC. נבנה את הריבוע FGHI אשר אורך צלעו שווה ל 5, וכו, נבנה את הריבוע HKLJ שאורך צלעו $5 - x$. לא קשה להראות שהמלבן IELK חופף למלבן JGBA ולכן, שטח הצורה המורכבת מהמלבנים IELK ו EFGJ שווה

ל 21. צורה זו, יחד עם הריבוע KLJH, יוצרת את הריבוע FGHI, אשר שטחו 25. לכן, שטח הריבוע KLJH שווה ל 4 = 21 - 25, ואורך צלעו שווה ל 2. מכאן, $5 - x = 2$ ונקבל שפתרון המשוואה הוא $x = 3$.

ומה אם שורש המשוואה גדול מ 5? הטיפול באפשרות ש- x גדול מחצי המקדם שלו, כלומר $x > 5$, נעשה כדלקמן:
נבנה, שוב, ריבוע שצלעו x ושטחו x^2 (הריבוע ABCD בשרטוט 5). שטח המלבן HGCD הוא 10x ולכן שטח המלבן HGBA שווה ל-21.



שרטוט 5

תהי F אמצע GC. נבנה את הריבוע MGFK אשר אורך צלעו 5. נסמן ב-I נקודה על BA כך ש $BI = x - 5$. נעביר דרך I את NJ כך ש $GF \parallel NJ$. לא קשה להראות כי המלבן HMLA חופף למלבן LIJK. לכן, סכום השטחים של המלבנים LIJK ו MGBL שווה ל 21, ויחד עם הריבוע IBFJ נקבל שטח של 25. מכאן, שטח הריבוע IBFJ שווה ל $4 = 21 - 25$ וצלעו שווה ל 2. לכן, $x - 5 = 2$ ומקבלים ש $x = 7$ הוא השורש השני של המשוואה.

התרגום האלגברי - סימבולי של שני חלקי פתרון זה הוא:

$$x = 5 \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21} \, .$$

אלחוארִיזמי מציין בראשית ספרו, שכל משוואה ריבועית ניתן להציג באחת משלוש הצורות שהובאו לעיל, ולכן ניתן למצוא את הפתרון של כל משוואה ריבועית לפי הדרכים שהודגמו:

למשוואה $x^2 + bx = c$ הפתרון: $x = \sqrt{\left(\frac{b}{4}\right)^2 \cdot 4 + c} - \frac{b}{2}$

או $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$

למשוואה $x^2 = bx + c$ הפתרון: $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$

ולמשוואה $x^2 + c = bx$ הפתרון: $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

(למשוואה האחרונה קיימים שני שורשים חיוביים, כאשר b ו c חיוביים ו $c < \left(\frac{b}{2}\right)^2$).

נדגיש שאלחוארִיזמי לא פתר את המשוואות בצורתן הכללית, אלא הביא דוגמאות לכל טיפוס ונתן פתרון לכל דוגמא, בציינו, שכל משוואה מאותו טיפוס ניתן לפתור בצורה שבה נפתרה הדוגמא.

אלחוארִיזמי לא ניסה לפתור את המשוואה הריבועית בצורה: $ax^2 + bx + c = 0$ כיוון שכאשר כל המקדמים חיוביים, הפתרונות חייבים להיות מספרים שליליים, ובהם לא השתמש. הוא גם לא פתר משוואה שאחד ממקדמיה שלילי, אלא עשה כן כאשר המקדם השלילי מועבר לאגף השני של המשוואה.

עיון בספרו של אלחוארִיזמי נותן לקורא תחושה של בנית יסודותיה של האלגברה. הבניה נעשית נדבך על גבי נדבך, יחד עם אלחוארִיזמי, ובלשוננו שאין בה סמלים והיא מצלצלת כשפה זרה באזנינו.

הערת המערכת

לקריאה נוספת על אלחוארִיזמי ותרומתו למתמטיקה:

1. Struik D.J., *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*; Harvard University, 1969, pp. 55-60.

בספר זה מובאים קטעים ממקורות היסטוריים שונים. ביניהם נמצא תרגום הגרסה הלטינית מ- 1140 של הקטע העוסק בפתרון המשוואה $x^2 + 10x = 39$. מעניין לראות דוגמא "לעשיית" מתמטיקה רק במלים, מבלי להשתמש בסמלים.

2. Boyer C.B., *A History of Mathematics*;
John Wiley & Sons, Inc., 1968, pp. 251-258.

בספר זה ניתן למצוא גם פרטים על תחום פעילות נוסף של אלחוארizמי.

שבבים - עלון למורי המתמטיקה, תיק מס' 19