# אינטגרל ומחשבון בר-תיכנות

מאת: עמוס ארליך
ביה"ס לחינוך, אוניברסיטת ת"א

כותב שורות אלה נמנה עם הנלהבים לשימוש במחשבוני-כיס, בני תיכנות, בהוראת מתמטיקה. בעזרת מחשבונים ניתן ללמוד חומר מתימטי חשוב בדרך רבת ענין. "שפת הכפתורים" של מחשבונים היא פשוטה ופרט להקדמות קטנות, ניתן להורותה תוך כדי שימוש במחשבונים.

נתאר כאן דוגמא לפעילות לימודית שנערכה תוך שימוש במחשבון בר-תיכנות. נושא הפעילות היה אלגוריתמוס לחישוב מספרי מקורב לאינטגרל מסוים*.

כנספחים למאמר יובאו:

1. הצגת שפתו של המחשבון TI 57.
2. תרגום האלגוריתמוס לחישוב מספרי של אינטגרל מסוים, לשפתו של TI 57.
3. דיון בשאלת בחירתו של מחשבון מתאים לבית הספר.

<u>תאור הפעילות:</u>

<u>המסגרת</u>

בקיץ תשל"ט, התקיימו ב"חוות השומר" וב"כדורי", מחנות לנוער שוחר מדע. מחנות אלה נועדו, בעיקרם, לנושאי גיאוגרפיה, הסטוריה ואקולוגיה של הגליל התחתון. הוריתי שם בשתי קבוצות מעורבות של בוגרי כיתות ט' ו-י', שבכל אחת מהן היו כתריסר משתתפים. לרשותנו עמדו 6 מחשבוני TI 57, מחשבון אחד TI 58 ואחד TI 59 (כולם בני תיכנות). למחשבונים הוקדשו שלוש פגישות, בנות 3-4 שעות כל אחת.
להלן נתאר את הפעילות הלימודים בפגישה השניה בכל אחת משתי הקבוצות. בחרתי להתרכז כאן בתוכן הפגישה השניה, משום שבה עסקנו בשתי הקבוצות באותו נושא (אינטגרציה נומרית) ותגובות המשתתפים בשתי הקבוצות היו דומות מאוד. ניתן, לכן, לשער שתלמידים אחרים יגיבו באופן דומה לאותו חומר. נציין כי בפגישה הראשונה הוקדש מיעוטו של הזמן ללימוד השימוש במחשבון ורובו הוקדש לשימושים מתימטיים שונים שלו.

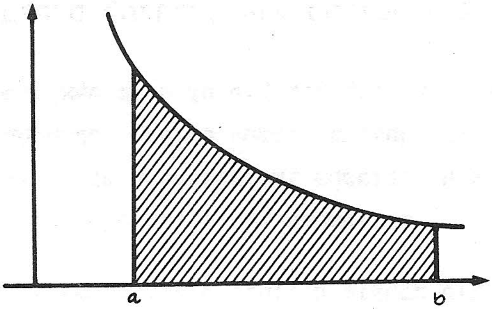
---

*לא השתמשנו שם במונח אינטגרל אלא במונח שטח, אך מטעמי נוחיות יובא כאן המונח המקובל.

הפגישה השניה התחילה בהצגת הבעיה של חישוב מקורב של שטח מתחת לגרף:
הצגתי והסברתי את השיטה ואת התכנית בשפתו של מחשבון בר-תיכנות.

<u>תהליך קירוב מספרי לאינטגרל מסוים</u>

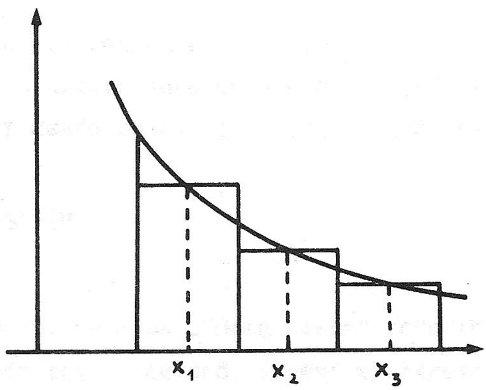
אנו רוצים לחשב את השטח המוגבל ע"י הגרף של $y = f(x)$, ע"י ציר x וע"י האנכים לציר זה בנקודות a ו b . כלומר, רוצים למצוא קירוב ל- $\int_a^b f(x)dx$
לשם פשטות נניח כי
$a < b$ וכי $f(x) \geq 0$,
עבור כל x שבין a
ו b .




נחלק את הקטע $[a, b]$ ל n חלקים שווים ברוחב $\Delta x$ (n מספר טבעי חיובי נתון
את נקודות האמצע של הקטעים נסמן ב- $x_1, x_2, \ldots x_n$ .
על כל קטע $\Delta x$, סביב $x_i$, נבנה
מלבן שגובהו $f(x_i)$ . סכום
שטחי מלבנים אלה

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

מהווה קירוב לשטח המבוקש*.
אם n קטן עשוי הקירוב להיות
גרוע, אך ניתן לשפרו ע"י
הגדלת n .




אלגוריתמוס מתאים (בצורה מפורטת) יהיה:

1. תן ל $\Sigma$ ערך התחלתי 0 .
2. חשב את $\Delta x$, כלומר את $\frac{b - a}{n}$ .
3. חשב את $x_1$, כלומר $a + \frac{\Delta x}{2}$ .
(4.) תן ל i ערך 1 .
5. חשב את $f(x_i)$. ($x_i$ הוא הערך שחושב לאחרונה. בתחילה זהו $x_1$).
6. הוסף ל- $\Sigma$ את $f(x_i)\cdot\Delta x$ .

---

*הסבר לשיטת המלבנים - ראה, למשל: צבס וליבנה, *אמצעי המחשה להוראת מתמטיקה נומרית*, תיק "שבבים" מס' 6.

7. הגדל את $x_i$ ב- $\Delta x$ (מתקבל $x_i$ חדש).

(8.) הגדל את i ב 1 .

9. בדוק אם $x_i$ (החדש) עודנו קטן מ b . אם כן, חזור לשלב 5; אם לא, המשך לשלב הבא.

10. הצג את הערך שיש כעת ל $\Sigma$ (זה יהיה הקירוב לשטח המבוקש) וסיים.

הערות: תכנית המחשבון בשפתו של TI 57, המיועדת להפעלת האלגוריתמוס - תובא בנספח 2.
שלבים 4 ו 8 אינם דרושים לתכנית המחשב.

## מהלך העבודה

טיפלנו, באמצעות תכנית המחשבון, בחישוב מקורב של השטח מתחת לגרף הפונקציה $y = x^2$ בין 0 ו b $(b > 0)$ .
בשלב ראשון חישבנו קירוב ל- $\int_0^3 x^2dx$, על-ידי חלוקה ל-10 קטעים $(n = 10)$.
התוצאה שהתקבלה היא 8.9775 .

חישוב נוסף של $\int_0^3 x^2dx$ , עבור $n = 20$ , נתן 8.994375 .

לאור התוצאות הנ"ל, העלו התלמידים (בשתי הקבוצות) את ההשערה שהערך המדוייק הוא 9.
לשאלה כיצד ניתן לאמת זאת, הציעו התלמידים לבדוק עבור n גדול יותר.
בדקנו עבור $n = 100$ וקבלנו 8.999775 . תוצאה זאת נתקבלה ע"י התלמידים כחיזוק רב להשערת ה-9. ברור, שהתוצאה לא נתקבלה כהוכחה. (הסכמנו שנסתפק כאן בדרגת וודאות נמוכה מזו המתקבלת בהוכחות מתימטיות).
עם זאת, נמצאו תלמידים שבדקו עבור $n = 200$ ואפילו עבור $n = 500$ . הבדיקה האחרונה אורכת כ-5 דקות ותוצאתה 8.999991 .

בעקבות התוצאה $\int_0^3 x^2dx = 9$, העלו התלמידים את ההשערה כי לכל b, יתקיים $\int_0^b x^2dx = b^2$.

לאור השערה זו החלטנו לבדוק את $\int_0^4 x^2dx$ .

עבור $n = 10$ קבלנו 21.28, עבור $n = 25$ קבלנו 21.3248 ועבור $n = 50$ קבלנו 21.3312 .
השערת התלמידים היתה שהערך המדוייק הוא $21\frac{1}{3}$ .
בדיקה עם n גדול יותר, תמכה בהשערה זו.

תוצאה זאת הפריכה, כמובן, את ההשערה שהשטח מ 0 עד b הוא $b^2$. למציאת השערה טובה יותר חילקו ביניהם התלמידים ערכי b שונים. להלן טבלה המתארת את ההשערות שהועלו לאור התוצאות:

| b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| שטח משוער | $\frac{1}{3}$ | $2\frac{2}{3}$ | 9 | $21\frac{1}{3}$ | $41\frac{2}{3}$ | $114\frac{1}{3}$ | $333\frac{1}{3}$ |

<u>הערה</u>: בבעיות כגון זו שלפנינו, בדיקות עבור $b = 1$ ועבור $b = 10$ מסייעות ליצירת הכללה יותר מאשר בדיקה עבור $b = 7$, למשל. אף אחד מהתלמידים לא הציע ביזמתו את $b = 1$ ורק באחת משתי הקבוצות הוצע $b = 10$ ע"י תלמיד. אני מעלה זאת על מנת להדגיש את הצורך <u>בלימוד</u> איסטרטגיות חקר.

בעקבות טבלה זאת, שהיתה רשומה על הלוח, גילו תלמידים, בשתי הקבוצות, את העובדה שכל המספרים שקבלנו הם "מספר שלם, או שלם בתוספת 1/3, או שלם בתוספת 2/3".
מכאן עלתה ההצעה לכתוב אותם בצורה $\frac{m}{3}$. בעקבות דיון בהצעה זו נתקבלה ההכללה:

$$\int_0^b x^2dx = \frac{b^3}{3}$$

מכיון שהכללה זאת עלתה מתוך רשימה מסויימת של דוגמאות, ראוי לבדוק אותה ע"י דוגמאות שלא היו ב"רשימה המקורית" ובפרט עבור b שאינו שלם. כאן קיימנו דיון בשאלה: מה יקרה אם ההשערה לא תתאמת עבור b שאינו שלם? האם זה יטיל חשד גם על מקרים בהם b שלם? והיה אם תתאמת ההשערה גם עבור b שאינו שלם, האם זה יחזק את ההשערה עבור b שלם, יותר מאשר בדיקה נוספת עבור b שלם?
יש ענין לבדוק הרחבות הנובעות מההשערה.

במסגרת זאת בדקנו אם:

$$\int_5^6 x^2dx = \frac{6^3}{3} - \frac{5^3}{3}$$

בהמשך עברנו אל שטחים שמתחת לגרף $y = x^3$. די מהר הגענו אל התוצאה:

$$\int_0^b x^3dx = \frac{b^4}{4}$$

את המשפט המתאים עבור $y = x^1$ הוכחתי בדרך גיאומטרית ומיד לאחר מכן העלו התלמידים את ההכללה:

$$\int_0^b x^m dx = \frac{b^{m+1}}{m+1}$$

(אני משער שחשבו על הכללה זאת, עוד לפני הטיפול במקרה $m = 1$).
באחת משתי הקבוצות נסתיימה הפגישה בשלב זה. בקבוצה השניה קיימנו גם דיון במקרה בו הקצה התחתון אינו 0 אלא a כלשהו.

נשאלת השאלה: האם אפשר לפתח את הנושא הלאה?
התשובה לשאלה זו תלויה במידה רבה בכיתה ובמסלול לימודיה. אוסף אפשרויות כולל:

א) טיפול ב $y = 5x^2$. הטיפול כולל: השערה, בדיקה מספרית, "הוכחה" המבוססת על תכנית חישוב והכללה העולה מתוך ה"הוכחה".
טיפול ב $y = x^2 + x^3$.
טיפול ב $y = nx^m + kx^\ell$.

ב) הצבעה על הדמיון למשפטים על נגזרות ומכאן, למשפט המקשר אינטגרל עם אנטינגזרת.

## נספח 1

## מבוא למחשבון TI 57

מחשבוני הכיס בני התיכנות ניתנים להפעלה בשני אופנים. האופן האחד, דומה לאופן ההפעלה של מחשבון רגיל ובו מתבצעות הפעולות במהלך סידרת הלחיצות על הכפתורים המתאימים. באופן השני, נרשמות הפעולות ב"זכרון התכנית" של המחשבון והן מתבצעות באופן אוטומטי רק לאחר שלוחצים על כפתור-ההפעלה המתאים. ניתן לשלב שני אופני הפעלה אלו. בדוגמא שנביא בנספח 2, נשתמש בדרך שילוב פשוטה:
לפני כל הרצה של תכנית נכניס ל"זכרונות המספריים" של המחשבון, באופן ישיר, את הנתונים המספריים בהם נרצה שהתכנית, הנמצאת ב"זכרון התכנית" תשתמש באותה הרצה.

מחשבון TI 57 הוא אחד המחשבונים בני-התיכנות הנפוצים. לכן תוצג כאן שפתו בקצרה:
הכפתור המסומן *STO* משמש להעתקת המספר שבחלון-ההצגה אל תוך תא זיכרון-מספרי. לדוגמא: אם בחלון נמצא המספר 123, לחיצת *STO 5* (תחילה *STO* אח"כ *5*) גורמת לכך שגם בתא זיכרון מס' 5 ימצא המספר 123.

פקודה כגון *RCL 2*, מעתיקה את המספר שבתא זיכרון מס' 2 אל החלון.

פקודת *SUM* גורמת לחיבור המספר שבחלון, למספר שבתא-זיכרון. לדוגמא: אם בחלון נמצא 15 ובתא זיכרון מס' 6 נמצא המספר 8, אזי *SUM 6* גורמת לכך שבתא מס' 6 ימצא המספר 23 (ובחלון ימשיך להימצא 15).

פקודת *LBL* שאחריה סיפרה, כגון *LBL 3*, אינה גורמת שום פעולה. אך אם בתכנית מופיעה הפקודה *GTO 3*, בהגיע המחשבון אל פקודה זאת הוא קופץ אל המקום בו מופיע *LBL 3* וממשיך את החישוב משם.

"פקודת התנאי" *X=0* (על כפתור אחד) גורמת למחשבון לבדוק אם המספר הנמצא באותו זמן בחלון אמנם שווה ל 0. אם כן, המחשבון ממשיך בעבודתו כרגיל. אם לא - הוא מדלג על הפקודה הבאה בתור וממשיך בפקודה שאחריה.
שימוש נפוץ בפקודת תנאי הוא בשילוב עם פקודת קפיצה. לדוגמא: בעקבות *X=0 GTO 1* תתבצע קפיצה אל *LBL 1*, רק אם בחלון ימצא המספר 0. בכל מקרה אחר, ימשיך המחשבון אל הפקודות הבאות בהמשך.

פקודת תנאי נוספת היא *x=t* ופירושה: בדוק אם המספר שבחלון שווה למספר שבתא 7.

הערה: מעמד מיוחד זה של תא זיכרון מס' 7 הוא תכונה מיוחדת של TI 57. במחשבונים אחרים מתמלא אותו תפקיד ע"י תאים מיוחדים, הנבדלים בצורה זו או אחרת, מתאי הזיכרון הרגילים. ישנם גם מחשבונים בני תכנות בהם לא קיימת פקודת תנאי מהסוג הנדון.

עוד פקודות תנאי הן *X≥t* , *INV X=0* , *INV X>0* , *INV X≥0* וכן *INV X=t* , *INV X≥t*. פירושה של הפקודה האחרונה הוא: אם המספר שבחלון איננו גדול או שווה לזה שבתא 7 (כלומר - קטן ממנו), בצע את הפקודה הבאה; ואם הוא גדול או שווה לו, דלג על הפקודה הבאה ועבור לזו שלאחריה.

ולבסוף: לפקודה *R/S* (RUN/STOP =) שני תפקידים: כאשר המחשבון במהלך ביצוע אוטומטי, היא מורה לו לעצור וכשהוא עומד, היא מורה לו להתחיל או להמשיך בביצוע התכנית.

## נספח 2

## שימוש במחשבון לחישוב מקורב של אינטגרל מסוים

על מנת להפוך את האלגוריתמוס לחישוב אינטגרל, לתכנית מחשבון, נקבע תחילה תפקידים לתאי הזיכרון.

| מספר התא | ת ו כ ב ו |
|---|---|
| 1 | a |
| 7 | b |
| 2 | תחילה n ואח"כ $\Delta x$ |
| 3 | $x_i$ (כלומר תחילה $x_1$ אח"כ $x_2$ אח"כ $x_3$ וכו'). |
| 4 | $\Sigma$ |

להכנסת התוכנית ל"זכרון התכנית" של המחשבון, יש ללחוץ תחילה על כפתור *LRN* (ואז עובר המכשיר ממצב העבודה הרגיל למצב "לימוד תכניות") ואח"כ יש ללחוץ את פקודות התוכנית בזו אחר זו. לבסוף יש ללחוץ, שנית, *LRN* (על מנת לחזור למצב עבודה).

והרי התכנית בשפתו של TI 57:
(התוכנית מסודרת כאן בשורות מטעמי סגנון בלבד. מספרי השורות מתאימים למספרי השלבים באלגוריתמוס המפורט בגוף המאמר. למעשה, מוכנסות הפקודות למחשבון בזו אחר זו כאילו הן בשורה אחת).

בתכנית זאת $f(x) = x^2$ .

```
1)   0 STO 4
2)   ( RCL 7 - RCL 1 ) ÷ RCL 2 = STO 2
3)   ÷ 2 + RCL 1 = STO 3
     LBL 1
5)   RCL 3 * RCL 3 =
6)   * RCL 2 = SUM 4
7)   RCL 2   SUM 3
9)   RCL 3   INV   x≥t   GTO   1
10)  RCL 4   R/S
```

לפני כל הרצה יש להכניס נתונים מספריים עבור a, b ו n, לתאי הזכרון המתאימים (1, 7 ו 2).

לדוגמא:

אם רוצים a = 12 יש ללחוץ *12 STO 1* .

להרצת התכנית יש ללחוץ *RST* (פקודה זאת פירושה: גש אל תחילת התכנית) ואח"כ *R/S* (שפרושה כאן - התחל לבצע).

אם אחרי הרצה אחת רוצים בהרצה נוספת, יש להכניס (לתא 2) ערך חדש עבור n. אפשר להכניס ערכים חדשים גם עבור a ו b, אך אם לא עושים זאת ההרצה החדשה תשתמש, אף היא, בערכים הישנים של a ו b .

נספח 3:

## בחירת מחשבון בר-תיכנות עפ"י המלצת מחבר המאמר

TI 57 עמד, עד לפני כשנה, במקום הראשון ברשימת המחשבונים שנראו לי מתאימים לשימוש בבתי הספר. אך שום מחשבון אינו יכול לעמוד במקום זה זמן רב. כיום, נראה לי שבמקום הראשון עומד Casio 501. מחשבון זה יקר במקצת מקודמו, אך יכולתו רבה במידה ניכרת והוא הדין בנוחיות השימוש בו. (עכ"פ, TI 57 עודנו שומר לדעתי על המקום השני).
יחד עם קבוצת מחשבוני Casio 501, מומלץ לרכוש גם Casio 502 אחד. שפתו זהה לזו של Casio 501, אך קיבולו כפול והוא ישמש לתכניות ארוכות במיוחד (עד פי 7.3 מהתכנית שהוצעה לעיל).

הערה: Casio 201 אינו מומלץ.

אם מוצע לך מחשבון אחר, כדאי לשים לב לנקודות הבאות:

א) יש לבדוק אם קיבולו של המחשבון מספיק לתכניות ארוכות במקצת מזו שהוצעה בנספח 2. ל- TI 57 מקום עבור תכנית ארוכה פי 1.5 מהנ"ל ומבחינה זאת הוא בקירבת המינימום הנדרש. Casio 501 יכול להכיל תכנית באורך פי 3.7 מתכנית זאת. זה הרבה יותר מהדרוש, אך המקום העודף יכול לשמש לשמירת תכניות ישנות. כיבוי Casio 501/502 אינו מוחק תכניות הנמצאות בו.

ב) קיימים בשוק מחשבונים, המתימרים להיות בני תכנות, למרות שאינם מאפשרים פקודות מותנות (כגון $X\geq 0$) או לולאות החוזרות על עצמן.

ג) יש לבדוק אם המחשבון מכיל כפתור *INT*, המחשב את החלק השלם של מספר. כפתור כזה חיוני לתכניות "תיכוניות" רבות (כולל חט"ב) הכוללות בדיקה אם מספר a מחלק מספר b .

ד) מחשבונים הבנויים על סדר פעולות החשבון הקרוי Post fix או RPN כגון מחשבוני HP, מאפשרים כתיבת תכניות יותר אלגנטיות אחרי שמתרגלים אליהם.