# שבבי שבבים

## מהו המספר?

לפניך מספר בן 9 ספרות: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$

המקיים כי לכל $i \neq j$ , $a_i \neq a_j$ ולכל $i$, $a_i \neq 0$.

(הסימון: $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ פירושו: $a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \ldots + a_n$).

א) מצא את המספר אם ידוע כי לכל $1 < n \leq 9$ $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ מתחלק ב n.

ב) האם מספר זה יחיד?

ג) מהו המספר אם ידוע כי לכל $1 < n \leq 9$ $\overline{a_n\ldots a_2a_1}$ מתחלק ב n?

---

הרעיון נלקח מהעלון בספרדית:

Revista de Juegos Snark

Anō III - No 9, Otoño 1978, p. 10

# טיול בוקר

מאת: מרדכי שורק
המכון לאמצעי הוראה.

בבוקר צח יצא מר ממג"ב*,
לשוח קמעה, עם הגברת כמק"ב**.
שיחתם, כתמיד, על הנושא הבוער:
מי מהשניים גדול יותר?

אמר ידידנו אל הגברת:
"השיחה עמך - ממש לתפארת,
אף כי הנך נפוחה ומתיהרת.
ובעוד שבחך נרבה לספר,
הרי בלי ספק - מה יש לדבר,
אנכי, אנכי, הגדול יותר!"

צחקה הגברת בקול גדול:
"קרוא תקרא כתרנגול.
הרי למספרים שונים -
אתה הגדול בין הקטנים,
מה נאמר - ראש לשועלים!
ואילו אני, לא אכביר מלים,
אף אם קטנה בין הגדולות,
הריני תמיד זנב לבליאות.
ולפיכך, לכל ברור:
גדולה יותר, ללא ערעור"

ואילו אתה, קורא יקר,
מי הגדול, התדע לומר?

---

*ממג"ב - מחלק משותף גדול ביותר.
**כמק"ב - כפולה משותפת קטנה ביותר.

# בעקבות Ramanujan

בשבבי שבבים שבתיק מס' 15 הבאנו את סיפור RAMANUJAN והמספר 1729.
שאלנו אז: מהו המספר הטבעי הקטן ביותר, שניתן לכתוב אותו כסכום של
שתי חזקות ריבועיות בשתי צורות שונות.

המספר הינו 50:

$$1^2 + 7^2 = 50 = 5^2 + 5^2$$

ניתן למצוא מספרים נוספים בעלי תכונה זו באמצעות תוכנית מחשב פשוטה,
בה סורקים מטריצה (בעלת מימדים מוגדרים) כשכל איבר בה שווה לסכום ריבועי
האינדקסים של המיקום:

$$A_{ij} = i^2 + j^2$$

אם ישנם איברים שווים במקומות שונים במטריצה, יהיו אלה המספרים המבוקשים.

להלן כמה דוגמאות מפלט המחשב:

$$1^2 + 8^2 = 65 = 4^2 + 7^2$$

$$2^2 + 9^2 = 85 = 6^2 + 7^2$$

$$10^2 + 30^2 = 1000 = 26^2 + 18^2$$

ובשלוש צורות שונות:

$$325 = 6^2 + 17^2 = 10^2 + 15^2 = 1^2 + 18^2$$

$$650 = 5^2 + 25^2 = 11^2 + 23^2 = 17^2 + 19^2$$

# תיקונים וקיצורי דרך במהלך החדש ללימוד הפונקציה הריביעית

מאת: רינה הרשקוביץ ומקסים ברוקהיימר
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

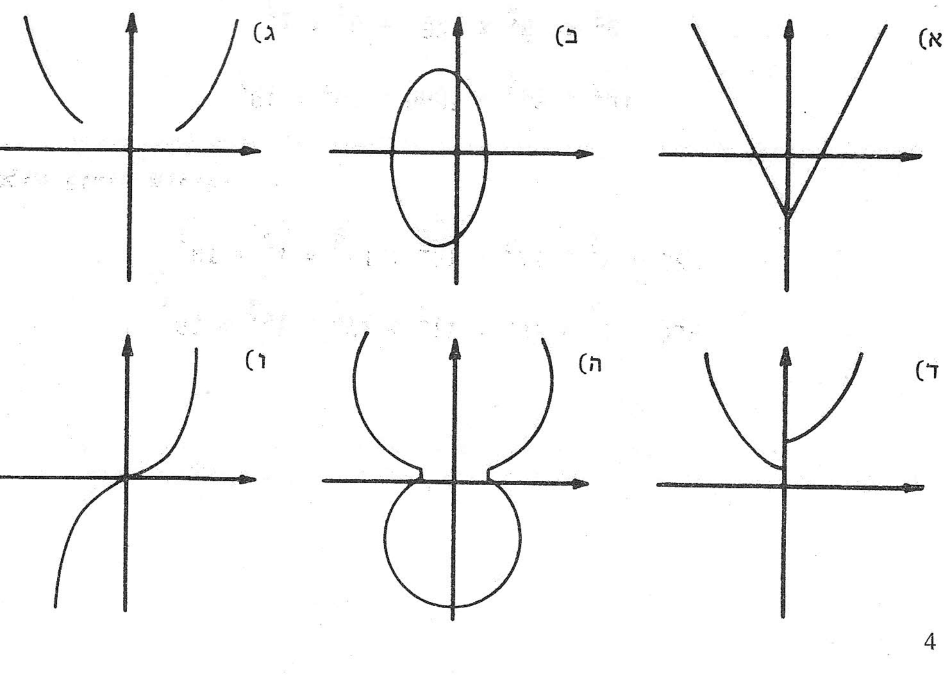
בתיק מס' 12 של שבבים הופיע המאמר:
"בעקבות הגרף של הפונקציה הריבועית".

מאמר זה מתאר מהלך חדש ללימוד הפונקציה הריבועית, המגלם בתוכו גישה דדוקטיבית לגילוי הגרף של הפונקציה הריבועית ונקודות ההתאפסות שלה (פתרונות המשוואה הריבועית).
מהלך זה יהיה יסוד הפרק *פונקציות ותבניות פסוק ריבועיות* בספר האלגברה לכיתה ט' "בתבנית רחובות" - (ספר ד') - במתכונתו החדשה.

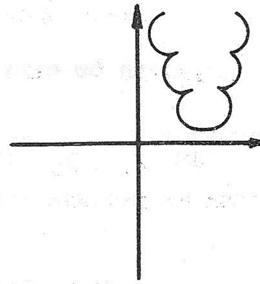
מאז פרסום המאמר ועד עתה, העברנו את המהלך החדש בהשתלמויות מורים וימי עיון. אגב עיסוקנו בחומר מצאנו תיקונים וקיצורי דרך והריהם מוצגים להלן:

I. קיצור דרך לכתוב במסגרת בעמוד 9 במאמר:

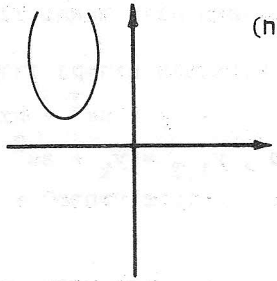
בדיון על צורת הגרף, יועלו, על ידי תלמידיך או בעזרתך, הצעות מהצעות שונות לצורתו, ראה השרטוט:



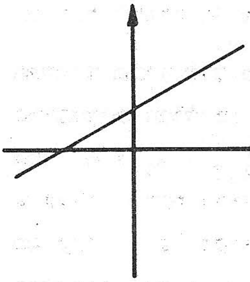
ז)



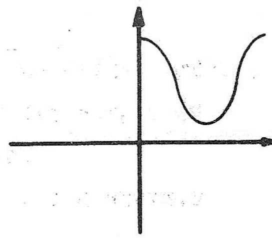
ח)



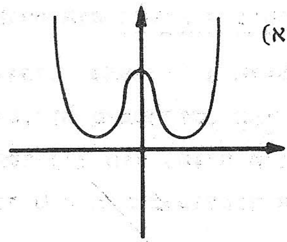
ט)



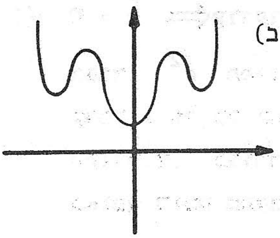
י)



יא)



יב)



את רוב ההצעות קל להפריך; הצעות בהן ל x-ים מסויימים יש שתי תמונות (הגרף איננו פונקציה), או הצעות בהן ישר המקביל לציר x חותך את הגרף ביותר משתי נקודות, בניגוד לתכונת הגרף אותה גילינו קודם לכן וכדי...

קשה יותר להפריך הצעות כמו א) ו י) בשרטוט.

במאמר הבאנו פיתוח מתמטי כבד כדי להוכיח כי מיתר חותך את הגרף של $y = ax^2 + bx + c$ בשתי נקודות לכל היותר. להלן הצעה אלטרנטיבית פשוטה מאוד הנשענת על מסקנות מהסעיפים הקודמים:

- ישר החותך את הגרף $y = ax^2 + bx + c$ הוא מהצורה $y = mx + n$.
  בנקודות החיתוך קיים:

$$mx + n = ax^2 + bx + c$$

$$n = ax^2 + (b - m)x + c$$

המשוואה לעיל מתארת את נקודות החיתוך של הישר $y = n$, שהינו מקביל לציר x, עם פונקציה ריבועית מהצורה: $ax^2 + bx + c$.

הראינו כבר בסעיף ב' כי יש שתי נקודות כאלה לכל היותר. מכאן הגרף א), עבורו קיים ישר החותך את הגרף באינסוף נקודות והגרף י), עבורו קיים ישר החותך את הגרף בשלוש נקודות, אינם יכולים לשמש כגרף הפונקציה הריבועית.

II. התשובה לסעיף ח' בעמוד 12 במאמר אינה מושלמת. להלן תוספת:

התלמיד הגיע לכך כי שיעורי נקודות סימטריות על הגרף של הפונקציה הריבועית הכללית: $y = ax^2 + bx + c$

הם: $x_{1,2} = x_k \pm \alpha$ ו $y_{1,2} = y_k + a\alpha^2$ , כאשר: $x_k$ , $y_k$ הם שיעורי נקודת הקודקוד ו $\alpha$ "מרחק" שיעורי x של שתי הנקודות הסימטריות משיעור x של הקודקוד.

מהביטוי $y_{1,2} = y_k + a\alpha^2$ אפשר ללמוד רבות על צורת הגרף:

1) $a > 0$ $\Longleftarrow$קודקוד הגרף הוא <u>נקודת מינימום.</u>

הסבר: $\alpha^2$ תמיד חיובי. כאשר גם a חיובי, $a\alpha^2$ חיובי. כלומר, ערכי y של כל שתי נקודות סימטריות, תמיד גדולים מערך y של הקודקוד. כלומר, הקודקוד הוא נקודת מינימום.

באופן דומה מתקבל כי $a < 0$ $\Longleftarrow$קודקוד הגרף נקודת מכסימום.

2) ככל ש $|a|$ גדול יותר, כך הגרף נעשה "צר" יותר:

- אם נתבונן ב $y = y_k + a\alpha^2$ עבור a-ים שונים, נקבל כי ערכי y לנקודות סימטריות, להן אותו מרחק $\alpha$ מנקודת הקודקוד, גדלים בערכם המוחלט ככל ש a גדל בערכו המוחלט. כלומר, ככל ש $|a|$ של הפונקציה גדול יותר, הגרף "מתרומם" או "יורד" מהר יותר או במילים אחרות הינו "צר" יותר.