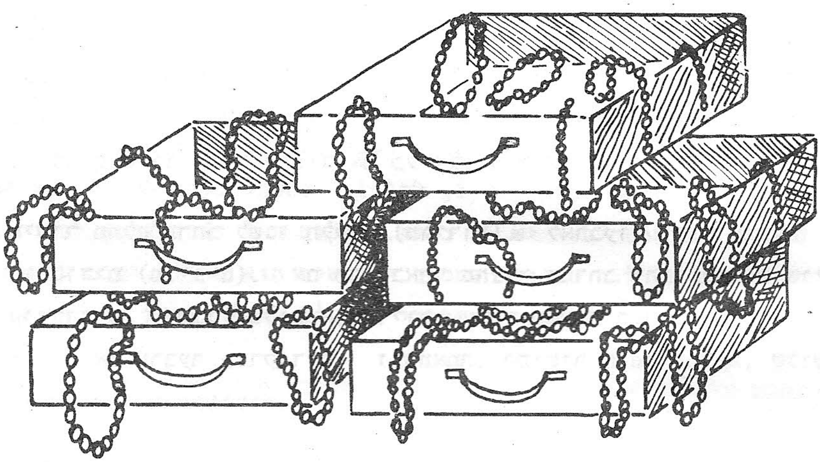
פתרון בעיות לפי "עקרון המגירות"

מאת: אברהם קריימר ורוחמה אבן
המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.



להלן פתרונות או הנחיות לפתרון הבעיות שהופיעו במאמר "עקרון המגירות" ב"שבבים" - תיק מס' 16.

1. המגירות הן 12 החודשים, הפנינים - 13 אנשים.

2. יש 300,000 מגירות (שערות) ו 300,001 פנינים (תושבים).

3. א) בשבוע 7 ימים (מגירות) - אזי מספיק שיהיו נוכחים 8 אנשים (פנינים), כדי שלשניים מהם יהיה יום הולדת באותו יום בשבוע.

   ב) לכל הפחות 15 אנשים (פנינים) ל 7 ימים (מגירות).

   ג) לכל הפחות $7(q - 1) + 1$ כלומר $7q - 6$ (פנינים) ל 7 ימים (מגירות).

4. ניתן להוכיח בכמה דרכים. אנו ניתן כאן דרך אחת להוכחה בדרך השלילה. נניח שבכל מגירה יש לכל היותר פנינה אחת. אזי ב s המגירות יהיו לכל היותר s פנינים. אבל יש s + 1 פנינים. קיבלנו סתירה, ולכן לפחות באחת המגירות יש יותר מפנינה אחת.

5. טענה זו היא הכללה של עיקרון המגירות.
גם אותה קל להוכיח בדרך השלילה.

6. ישר q מחלק מישור לשני חצאים (מגירות). למשולש ישנם שלושה קודקודים (פנינים). מ"עקרון המגירות" נקבל כי באחד מחצאי המישור יהיו לפחות שני קודקודים. מכאן, צלע אחת מוכלת כולה באחד מחצאי המישור, והישר q אינו יכול לחתוך את כל צלעות המשולש.

7. מישור מחלק מרחב לשני חלקים (מגירות). לארבעון ישנם ארבעה קודקודים (פנינים). אם כך, באחד מחצאי המרחב יהיו לפחות שני קודקודים. יתכנו שלוש אפשרויות: אחד מחצאי המרחב מכיל שניים, שלושה או ארבעה קודקודים. ובהתאמה, המישור חותך ארבעה, שלושה או אף אחד מהמקצועות.

8. א) נעביר את שלושת קטעי האמצעים של המשולש הנתון. הם מחלקים את המשולש ל 4 משולשים (מגירות) שווי צלעות בעלי אורך צלע של יחידה אחת. מכיוון שיש 5 חורים (פנינים), אז לפחות באחד מהמשולשים (או על הצלע) ישנם שני חורים. המרחק ביניהם קטן או שווה לאורך הצלע שהוא יחידה אחת.

ב) נחלק כל צלע של המשולש הנתון ל 4 חלקים שווים. דרך נקודות החלוקה נעביר מקבילים לצלעות. נקבל 16 משולשים חופפים שווי צלעות (מגירות) בעלי אורך צלע של חצי יחידה. כיוון שישנם 17 חורים (פנינים), לפחות שני חורים יהיו באחד מהמשולשים ונקבל כי המרחק ביניהם קטן או שווה לחצי יחידה.
הערה: הניסוח של השאלה בחלק ב' איננו מדוייק וצריך להיות דומה לזה של חלק א'.

9. כאשר המכנה b מורכב מחזקות של 5 ו 2 בלבד, השבר $\frac{a}{b}$ הוא שבר עשרוני סופי והמחזור מכיל רק ספרה אחת - 0.
כאשר $\frac{a}{b}$ מצומצם (נניח $a < b$) ו b מכיל גורמים שונים מ 2 ו 5, אזי ההצגה העשרונית של $\frac{a}{b}$ הינה שבר עשרוני מחזורי. מחילוק a ב b אפשר לקבל $b - 1$ שאריות שונות (לא כולל אפס): $1, 2, \ldots, b - 1$ (מגירות). מספר השאריות (פנינים) המתקבלות בשלבי החילוק הוא אינסופי (כי ההצגה העשרונית היא אינסופית). מכאן, אחרי לכל היותר $b - 1$ שלבים בחילוק, נקבל שארית שכבר הופיעה קודם, ולכן אורך המחזור לא יעלה על $b - 1$.

10. במקום ה i ($i = 1,2,\ldots$) אחרי הנקודה העשרונית נמצאת אחת מ 10 הספרות (מגירות). לכן, לפחות בשני מספרים מתוך ה 11 (פנינים), תהיה אותה סיפרה במקום ה i, לכל i. נסתכל בערך המוחלט של ההפרש של כל זוג מספרים - יש 55 כאלה. במקום ה i ישנו אפס, לפחות באחד מההפרשים הנ"ל. מכיוון שמספר ההפרשים הוא סופי, ישנם לפחות שני מספרים a ו b כך שהשם העשרוני של $|a - b|$ מכיל אינסוף אפסים.

11. נחלק כל אחד מ 12 המספרים ב 11. מתקבלות 12 שאריות (פנינים). חילוק ב 11 יכול לתת 11 שאריות שונות (מגירות): $0, 1, \ldots, 10$. לכן, ישנן שתי שאריות שוות וההפרש בין המספרים המתאימים מתחלק 11. ההפרש בין שני המספרים איננו אפס (המספרים שונים) ולכן הוא מספר דו-ספרתי. מספר דו-ספרתי המתחלק ב 11 הוא שווה ספרות. לכן, ההפרש הנ"ל הוא המבוקש.

12. נתונים n מספרים שונים (פנינים) ו $n - 1$ שאריות שונות (מגירות) המתקבלות מחילוק המספרים ב n. לכן ישנן שתי שאריות שוות וההפרש בין המספרים המתאימים מתחלק ב n. נסמן את שני המספרים ב $a + id$ ו $a + jd$ ($i \neq j$; $i, j = 0,\ldots,n - 1$). אזי:

$$n \mid ((a + id) - (a + jd))$$

(קרי: n מחלק את $(a + id) - (a + jd)$ בלי שארית).

מכאן: $n \mid (i - j)d$.

$i - j < n$ ולכן d ו n אינם זרים.

13. נסמן את המספרים הנתונים ב: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{20}$
נחסר כל מספר מזה שאחריו ונקבל 19 הפרשים:

$$a_2 - a_1 ,\ a_3 - a_2 ,\ a_4 - a_3 ,\ldots ,a_{20} - a_{19}$$

(אלו מספרים טבעיים).

נניח שאין ביניהם 4 מספרים (הפרשים) שווים, אזי 1, 2, 3, 4, 5, 6 יופיעו לכל היותר שלוש פעמים ו 7 לפחות פעם אחת (אך לא יותר מ 3 פעמים).
נחבר את 19 ההפרשים ונקבל:

$$a_{20} - a_1 \geq 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + 7 = 70$$

אבל a_1 ו a_{20} הם מספרים טבעיים הקטנים מ 70.
מכאן, ישנם לפחות 4 הפרשים שווים.

14. א) כל אדם התחיל כבר ללחוץ ידיים לאנשים בחדר:
ישנם n אנשים (פנינים) בחדר. כל אחד לחץ ידיים בין 1 ל $n - 1$ פעמים ($n - 1$ מגירות). לכן, בכל רגע יש שני אנשים שלחצו אותו מספר של ידיים.

ב) לפחות אדם אחד עדיין לא התחיל ללחוץ ידיים:
כל אחד מ n האנשים (פנינים) לחץ ידיים בין 0 ל $n - 2$ פעמים ($n - 1$ מגירות). וההמשך כמו בחלק א'.

15. דומה מאוד לתרגיל 14.

16. נסתכל ב $n+1$ המספרים (פנינים) הבאים:

$$1\ ,11\ ,111\ ,\ \dots\ ,\ \underbrace{11\ \dots\ 1}_{\text{פעמים } n+1}$$

מספר השאריות השונות שאפשר לקבל מחילוק המספרים ב n הוא n (מגירות).
מ"עקרון המגירות" נקבל כי בין המספרים הנ"ל ימצאו שני מספרים:

$$a = \underbrace{11\ \dots\ 1}_{\text{פעמים } a} \qquad b = \underbrace{11\ \dots\ 1}_{\text{פעמים } b} \qquad (a > b)$$

ששאריותיהם בחילוק ב n שוות. לכן הפרשם: $\underbrace{11\ \dots\ 1}_{\text{פעמים } a-b}\cdot 10^b$, מתחלק ב n.

n ו 10 זרים זה לזה ולכן $\underbrace{11\ \dots\ 1}_{\text{פעמים } a-b}$ מתחלק ב n .

17. נסתכל ב 10^n המספרים (פנינים) הבאים:

$$a^1\ ,\ a^2\ ,\ a^3\ ,\dots,\ a^{10^n}$$

כל אחד מהם זר ל 10^n, ולכן מספר השאריות השונות שאפשר לקבל מחילוק המספרים ב 10^n הוא $10^n - 1$ (מגירות).
מכאן, לפי "עקרון המגירות", ישנם שני מספרים a^m ו a^k $(m > k)$
אשר הפרשם: $a^m - a^k$, מתחלק ב 10^n .

כלומר, $$a^m - a^k = 10^n p$$

$$a^k(a^{m-k} - 1) = 10^n p$$

a^k זר ל 10^n ולכן $a^{m-k} - 1$ מתחלק ב 10^n .

כלומר: $$a^{m-k} - 1 = 10^n t$$

$$a^{m-k} = 10^n t + 1$$

זהו מספר אשר n הספרות האחרונות שלו הן $\underbrace{00\ \dots\ 01}_{n}$

18. ישנם 2n מספרים. נחלק אותם ל n קבוצות (מגירות), כך שכל קבוצה תכיל שני מספרים עוקבים: $\{2k - 1, 2k\}$; $k = 1,\ldots,n$.
נבחר $n + 1$ מספרים (פנינים). לפי "עיקרון המגירות", יהיה עלינו לבחור שני מספרים ממגירה אחת. לכן, בין $n + 1$ המספרים, ישנם שני מספרים עוקבים. ושני מספרים עוקבים הינם זרים זה לזה.

19. מספר הקבוצות החלקיות ולא ריקות שאפשר ליצור מ n מספרים הוא $2^n - 1$. לכן, מ 10 מספרים, אפשר ליצור 1023 $(2^{10} - 1 = 1023)$ קבוצות שונות ולא ריקות (פנינים).
סכום המספרים בכל קבוצה איננו גדול מ 990 (בקבוצה יש לכל היותר 10 מספרים, שכל אחד מהם קטן או שווה ל 99). לכן, מספר הסכומים השונים הוא לכל היותר 990 (מגירות).
מכאן, יש לפחות שתי קבוצות שונות שסכומי האיברים שלהן שווים.
נוציא מהן את האיברים המשותפים (אם יש כאלה) ונקבל קבוצות זרות בעלות סכומים שווים.

20. נוכיח באינדוקציה:

א) $n = 1$

$2^{n+1} - 1 = 3$, $2^n = 2$. צ"ל כי מבין כל שלושה מספרים שלמים (פנינים), ניתן לבחור שניים שסכומם מתחלק ב 2. מספר שלם יכול להיות זוגי או אי-זוגי (2 מגירות). לכן ישנם לפחות שני מספרים זוגיים או שניים אי-זוגיים וסכומם מתחלק ב 2.

ב) נניח הטענה נכונה עבור $n = k$ ונוכיח אותה עבור $n = k + 1$.
כלומר: ידוע כי מבין $2^{k+1} - 1$ מספרים שלמים כלשהם, ניתן לבחור 2^k מספרים אשר סכומם מתחלק ב 2^k.
נוכיח כי מבין $2^{k+2} - 1$ מספרים שלמים, ניתן לבחור 2^{k+1} מספרים אשר סכומם מתחלק ב 2^{k+1}.

נתונים $2^{k+2} - 1$ מספרים שלמים כלשהם. לפי הנחת האינדוקציה (כיוון ש $2^{k+2} - 1 > 2^{k+1} - 1$), ניתן לבחור מתוכם 2^k מספרים שסכומם מתחלק ב 2^k. נסמן מספרים אלה ב $X_1, X_2, \ldots, X_{2^k}$.

אזי:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{2^k}}{2^k} = q_1 \quad , \quad (q_1 \text{ מספר שלם}).$$

כמה מספרים שונים מ x_i $(i = 1,...,2^k)$ נשארו?

$$2^{k+2} - 1 - 2^k = 2^{k+1} - 1 + 2^k$$

נשארו יותר מ $2^{k+1} - 1$ מספרים. לכן ניתן לבחור מתוכם 2^k מספרים, אשר סכומם מתחלק ב 2^k . נסמן מספרים אלה ב $Y_1, Y_2, ..., Y_{2^k}$.

אזי:

$$\frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_{2^k}}{2^k} = q_2 \quad , \quad (q_2 \text{ מספר שלם}).$$

כמה מספרים שונים מ x_i ו y_i $(i = 1,...,2^k)$ נשארו?

$$2^{k+1} - 1 + 2^k - 2^k = 2^{k+1} - 1$$

נשארו $2^{k+1} - 1$ מספרים. ניתן לבחור מתוכם 2^k מספרים, אשר סכומם מתחלק ב 2^k . נסמן מספרים אלה ב $Z_1, Z_2, ..., Z_{2^k}$.

$$\frac{Z_1 + Z_2 + ... + Z_{2^k}}{2^k} = q_3 \quad , \quad (q_3 \text{ מספר שלם}).$$

לפי חלק א', ניתן לבחור מ q_1 , q_2 , q_3 שני מספרים שסכומם מתחלק ב 2. נניח אלו q_1 ו q_2 .

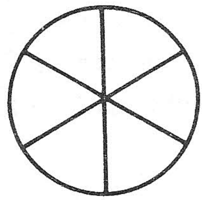
אזי:

$$\frac{X_1 + X_2 + ... + X_{2^k}}{2^k} + \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_{2^k}}{2^k} = 2Q \quad , \quad (Q \text{ שלם})$$

$$X_1 + X_2 + ... + X_{2^k} + Y_1 + Y_2 + ... + Y_{2^k} = 2^{k+1} Q$$

כלומר, בחרנו 2^{k+1} מספרים אשר סכומם מתחלק ב 2^{k+1} .

21. נחלק את העיגול (בעל רדיוס 1) ל 6 גזרות שוות (מגירות). מכיוון שישנן 7 נקודות (פנינים), באחת הגזרות ימצאו לפחות שתי נקודות.



נתון כי המרחק הקטן ביותר בין שתי נקודות הוא 1. לכן, שתי הנקודות הן קצות הקשת של הגיזרה הנ"ל או אחת מהן על הקשת והשניה במרכז. מכאן, 6 נקודות נמצאות על המעגל (מחלקות אותו ל 6 חלקים שווים) ואחת במרכז.

22. א) אם ישנו אדם המכיר לפחות n אנשים - מתקיימת אחת האפשרויות.

ב) נניח אין איש המכיר לפחות n אנשים. כלומר, כל אחד מכיר פחות מ n אנשים.

ישנם $n(m - 1) + 1$ אנשים (פנינים), אזי ניתן לסדר אותם ב $m - 1$ קבוצות (מגירות), כך שבאחת הקבוצות יהיו לפחות n אנשים.

נבחר אדם אחד ונסמנו x_1. נאסוף את כל האנשים ש x_1 מכיר לקבוצה I. נשלים את מספר האנשים בקבוצה I ל n, על ידי כך שנוסיף אנשים ש x_1 לא מכיר.

נבחר אדם אחד מבין האנשים ש x_1 אינו מכיר בקבוצה I ונסמנו x_2. נאסוף את כל האנשים ש x_2 מכיר (ושאינם בקבוצה I) לקבוצה II. נשלים את מספר האנשים בקבוצה II ל n, על-ידי הוספת אנשים ש x_2 לא מכיר. נבחר אדם אחד מבין האנשים ש x_2 אינו מכיר בקבוצה II ונסמנו x_3. נבנה את קבוצה III וכו'.

בדרך זו אנו בוחרים $x_1, x_2, \ldots, x_m$ אנשים, שכל שניים מהם אינם מכירים זה את זה.

הוכחנו אם כן, כי מתקיימת לפחות אחת מהאפשרויות.

ג) המשפט איננו נכון אם אדם אחד עוזב את האולם.

לדוגמא: $n = 3$, $m = 3$. מספר האנשים באולם $6 = 3(3 - 1)$.

נדון במקרה ששלושה אנשים מכירים זה את זה ואינם מכירים את השלושה האחרים; והשלושה האחרים מכירים זה את זה, אך אינם מכירים את השלושה הראשונים.

אם כך, לא מתקיימת האפשרות הראשונה שבאולם נמצאים שלושה (m) אנשים שכל שניים אינם מכירים זה את זה. כמו כן, לא מתקיימת גם האפשרות השניה. זאת מכיוון שאין אדם אחד המכיר לפחות שלושה (n) מבין האנשים.

23. נחסר a_1 מכל המספרים הנתונים ונקבל $k - 1$ מספרים חיוביים שונים זה מזה וקטנים מ n:

(1) $$a_2 - a_1 , a_3 - a_1, \dots, a_k - a_1$$

נוסיף למספרים אלה את k המספרים הנתונים:

(2) $$a_1 , a_2 , \dots , a_k$$

נקבל $2k - 1$ מספרים טבעיים קטנים או שווים ל n (פנינים).
ישנם n מספרים טבעיים שונים הקטנים או שווים ל n (מגירות).
כיוון ש $k > [\frac{n+1}{2}]$ אזי $2k - 1 > n$. לכן לפחות שניים מבין המספרים ב *(1)* וב *(2)*, שווים. בין המספרים של סידרה *(1)* אין מספרים שווים, וגם בסידרה *(2)* אין מספרים שווים. מכאן, לפחות אחד מהמספרים של סידרה *(1)* (נסמנו $a_r - a_1$) שווה למספר מסידרה *(2)*. (נסמנו a_i).

כלומר: $$a_r - a_1 = a_i$$

או: $$a_r = a_i + a_1$$

24. דומה לבעיה 22.

25. אם שניים מהמספרים שווים זה לזה, אזי ההפרש ביניהם שווה ל 0 ואז מכפלת ההפרשים מתחלקת ב 12.
נניח ארבעת המספרים שונים זה מזה (פנינים). נחלק אותם ב 3. חלוקה ב 3 נותנת, לכל היותר, שלוש שאריות שונות (מגירות). לכן ישנם שני מספרים בעלי אותה שארית בחלוקה ב 3 וההפרש ביניהם מתחלק ב 3. כל חלוקה שהיא של ארבעת המספרים למספרים זוגיים ואי-זוגיים, תתן לפחות שני הפרשים זוגיים. לכן המכפלה מתחלקת ב 12.

26. הערה: ניסוח הבעיה איננו מדוייק. יש להראות כי ישנו <u>לפחות</u> מספר אחד הנבדל ממספר טבעי <u>או 0</u>, בלא יותר מ $\frac{1}{n}$.

נבנה מעגל שהיקפו 1. נבחר עליו נקודה 0 המתאימה למספר 0 ונקצה על המעגל, בכיוון החיובי, את הנקודות A_1 , A_2,...., A_{n-1} , המתאימות למספרים a , 2a , ... , (n-1)a.
נחלק את המעגל ל n קשתות שוות, החל מהנקודה 0. אורך כל קשת $\frac{1}{n}$.
נגדיר את נקודות הקשת כנקודות על הקשת כולל הקצה הימני (בלי הקצה השמאלי).

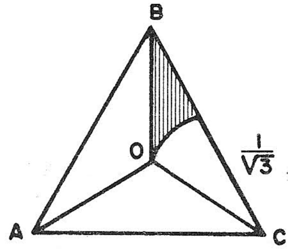
א) אם בכל אחת מהקשתות נמצאת נקודה אחת בלבד, אזי באחת הקשתות הקרובות ביותר לנקודה 0, ישנה נקודה המתאימה למספר המבוקש.

ב) אם באחת הקשתות אין אף נקודה מהנקודות 0 , A_1 , A_2 ,...., A_{n-1} (פנימים), אזי באחת משאר n - 1 הקשתות (מגירות), יהיו לפחות שתי נקודות: A_k ו A_m . הן נמצאות בקשת אחת, לכן המרחק ביניהן קטן מ $\frac{1}{n}$; מרחק זה שווה למרחק שבין הנקודה 0 לנקודה $A_{|m-k|}$.
לכן, המספר $a|m-k|$ המתאים לנקודה $A_{|m-k|}$ הוא המספר המבוקש.

27. בין עשרה מספרים טבעיים עוקבים ישנם 5 מספרים אידוגיים. כלומר, 5 מספרים שאינם מתחלקים ב 2.
בין 5 מספרים עוקבים אידוגיים ישנם אחד או שניים המתחלקים ב 3.
כלומר ישנם 4 או 3 מספרים שאינם מתחלקים ב 3. מכאן, ישנם, 4 או 3 מספרים שאינם מתחלקים ב 2 וב 3.
בין 5 מספרים עוקבים אידוגיים ישנו רק מספר אחד המתחלק ב 5. אם מספר זה מתחלק ב 3, אזי נשארו 4 או 3 מספרים אידוגיים שאינם מתחלקים ב 2, ב 3 וב 5. אם מספר זה אינו מתחלק ב 3, אזי נשארו 3 או 2 מספרים שאינם מתחלקים ב 2, ב 3 וב 5.
בין 5 מספרים עוקבים אידוגיים, יש לכל היותר מספר אחד המתחלק ב 7.
לכן ישנם 4 או 5 מספרים שאינם מתחלקים ב 7.
מכאן נובע שיש לפחות מספר אחד ולכל היותר ארבעה מספרים שאינם מתחלקים ב 2, 3, 5 ו 7.

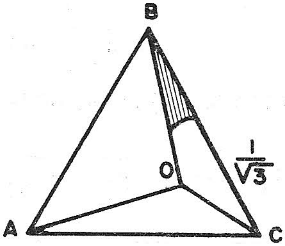
28. ניתן לחלק משולש שווה צלעות שאורך צלעו 1 לשלוש קבוצות חלקיות באופנים שיפורטו להלן. בכל אחת מהחלוקות הושחרה צורה שהמרחק מהנקודות בה לנקודה C, גדול או שווה ל $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

א)



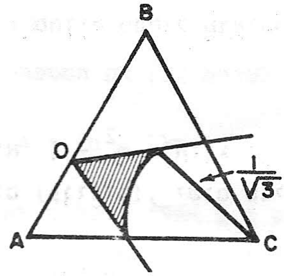
0 - במרכז; $OC = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ב)



0 - נקודה כלשהיא בתוך המשולש.

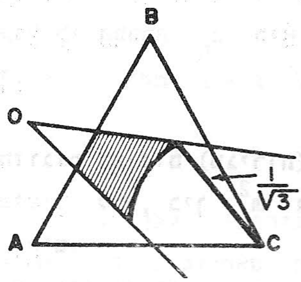
ג)



0 - נקודה כלשהי על צלע (AB); h - גובה

$CO \geq h = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{\sqrt{3}}$

ד)



0 - נקודה מחוץ למשולש.
ההוכחה כמו בחלק ג'

הערה: בניסוח השאלה נפלה טעות: צ"ל משולש שווה צלעות ולא שווה-שוקיים.

29. נניח שזה אפשרי. נעביר סביב כל נקודה כמרכז, מעגל בעל רדיוס 0.5. נקבל 400 עיגולים שאין להם נקודות משותפות וכולם נמצאים בעיגול שמרכזו זהה למרכזו של העיגול הנתון ורדיוסו $9.5 + 0.5 = 10$. שטח העיגול הגדול צריך להיות גדול מסכום שטחי העיגולים, אבל שטח העיגול הגדול הוא 100π וסכום שטחי העיגולים הוא $400 \cdot 0.5^2\pi = 100\pi$.

30. נפתור את התרגיל למודלו m.

נסמן את השארית המתקבלת מחילוק a_i ב m ב $\overline{a_i}$.

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \pmod m$ ולכן, כאשר חוזרות $\overline{a_i}$ ו $\overline{a_{i+1}}$,

חוזרת גם $\overline{a_{i+2}}$.

נגדיר סדרה של זוגות שאריות:

$$(1) \quad (\overline{a_1}\,,\overline{a_2})\,,(\overline{a_2}\,,\overline{a_3})\,,(\overline{a_3}\,,\overline{a_4})\,,\ldots,(\overline{a_n}\,,\overline{a_{n+1}})\,,\ldots$$

$(\overline{a_i}\,,\overline{a_{i+1}}) = (\overline{a_j}\,,\overline{a_{j+1}})$ אם ורק אם $\overline{a_i} = \overline{a_j}$ ו $\overline{a_{i+1}} = \overline{a_{j+1}}$

נראה כי אחד מהזוגות בסדרה (1) חוזר, וכי זוג זה הוא הזוג הראשון. מכך נקבל כי הסדרה a_n היא סדרה מחזורית והמחזור מתחיל מהאיבר הראשון.

מספר הזוגות השונים (מגירות) בסדרה (1) הוא $m^2 - 1$ (הזוג (0,0) לא מופיע). לכן, בין m^2 הזוגות הראשונים (פנינים), ישנם שני זוגות זהים.

נסמן את הזוג הראשון שחוזר ב $(\overline{a_k}\,,\overline{a_{k+1}})$. צ"ל כי $k = 1$.

אם $k > 1$, בסדרה (1) נמצא זוג $(\overline{a_i}\,,\overline{a_{i+1}})$, השווה לזוג $(\overline{a_k}\,,\overline{a_{k+1}})$ ו $i > k > 1$.

ידוע כי $\overline{a_{i-1}} = \overline{a_{i+1}} - \overline{a_i}$ ו $\overline{a_{k-1}} = \overline{a_{k+1}} - \overline{a_k}$

לכן $\overline{a_{i-1}} = \overline{a_{k-1}}$

מכאן, הזוג הראשון שחוזר הוא $(\overline{a_{k-1}}\,,\overline{a_k})$ ולא $(\overline{a_k}\,,\overline{a_{k+1}})$.

קיבלנו סתירה, ולכן הזוג הראשון הוא זה שחוזר.

חסם עליון לאורך המחזור הוא $m^2 - 1$.

3. נסתכל במספרים: $a\ ,\ a+m,\dots,a+(n-1)m$ מודולו n *(1)*.
נראה כי אין ביניהם שני מספרים השווים לפי מודולו n .
נניח כי ישנם שני מספרים: $a+pm$ ו $a+tm$

$(p \neq t\ ;\ 0 < p < n\ ;\ 0 < t < n)$.

השווים מודולו n. אזי:

$$a + tm - (a + pm) = nq$$

$$(t - p)m = nq$$

m ו n זרים ולכן $n|(t-p)$ (n מחלק את $t-p$).
אבל $0 < p < n\ ;\ 0 < t < n$ ו $t \neq p$. לכן לא קיימים ב *(1)* שני מספרים השווים לפי מודולו n .

נוסיף לסדרה *(1)* את המספר $b + kn$ ונקבל $n + 1$ מספרים (פנינים):

$$a\ ,\ a+m\ ,\ \dots\ ,\ a+(n-1)m\ ,\ b+kn \qquad (2)$$

מחילוק ב n אפשר לקבל n שאריות שונות (מגירות). לכן, בין השאריות מחילוק ב n של המספרים מסדרה *(2)* ישנן שתי שאריות שוות. אחת מהן מתקבלת מ $b + kn$.

מכאן:

$$a + sm - (b + kn) = nQ \qquad (0 \leq s \leq n-1)$$

$$a + sm = nQ + b + kn$$

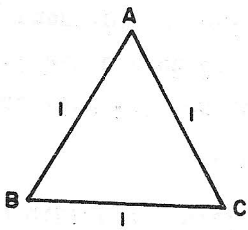
נסמן ב x : $x = a + sm = b + n(Q + k)$

לכן: $x - b = (Q + k)n$ ו $x - a = sm$

כלומר: $x \equiv a \pmod m$

$$x \equiv b \pmod n$$

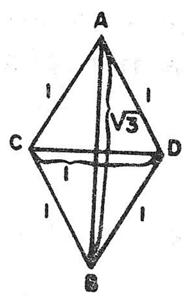
32. א) נסתכל בשלוש נקודות במישור (פנינים)
המקיימות:
$AB = BC = AC = 1$.
ישנם שני צבעים (מגירות)
ולכן ישנן לפחות שתי נקודות
במרחק יחידה אחת, בעלות אותו צבע.



ב) תהי A נקודה במישור הצבועה בצבע א'. קיימת נקודה B במרחק של $\sqrt{3}$ מ A, הצבועה בצבע ב' (כי ניקח שתי נקודות של המעגל שמרכזו ב A ורדיוסו $\sqrt{3}$, שמרחקן זו מזו יחידה אחת. אם שתיהן באותו צבע - גמרנו. אם לא - אזי אחת צבועה בצבע שונה מצבע א'). תהיינה C ו D שתי נקודות המקיימות:

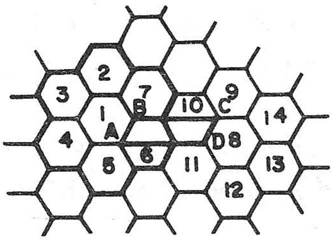
$$AC = AD = CB = BD = CD = 1$$

כמו כן $AB = \sqrt{3}$



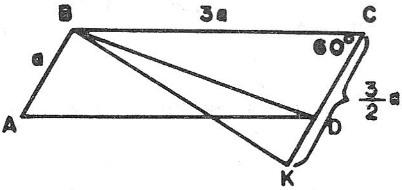
ישנן ארבע נקודות (פנינים) ושלושה צבעים (מגירות). לכן, יש לפחות שתי נקודות בעלות אותו צבע. אלו לא A ו B; וכל שאר הנקודות מרחקן זו מזו יחידה אחת. לכן ישנן נקודות במרחק יחידה אחת בעלות אותו צבע.

ג) בחלק את המישור למשושים משוכללים.



נסתכל בקבוצה של שבעה משושים, המסודרים כך ששישה מהם מקיפים אחד (המשושים הממוספרים 1-7).
נצבע כל אחד מהמשושים הנ"ל בצבע אחר.
ניקח קבוצה נוספת של משושים כנ"ל ונצבע אותם בהתאמה לקבוצה הראשונה (המשושים הממוספרים 8-14).
באופן כזה נוכל לצבוע את כל המישור ב 7 צבעים.
עתה נראה שניתן לבחור את אורך הצלע של המשושה כך שמרחק בין שתי נקודות כלשהן באותו צבע, יהיה שונה מ 1.
ברור כי אורך הצלע, a, צריך להיות קטן מ $\frac{1}{2}$.
נתבונן עתה במקבילית ABCD . $BK \perp CD$.
המרחק הקטן ביותר בין שתי נקודות בעלות אותו צבע הוא אורך הקטע BD. נביע אותו באמצעות אורך הצלע של המשושה, a:

$$AB = a \ , \ BC = 3a \ , \ KD = \frac{a}{2} \ , \ BK = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$$



$$BD = a\sqrt{7}$$

כדי שהמרחק בין כל שתי נקודות של המשושים 1 ו 8 לא יהיה שווה ל 1
צריך להתקיים $BD > 1$

$$a\sqrt{7} > 1$$

$$a > \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{7}} < a < \frac{1}{2}$$

33. נוכיח את הטענה השקולה:

$a_1, a_2, \dots, a_n$ הם מספרים טבעיים שעבורם $a_1 < a_2 < \dots < a_n \le 2n$.

אם $a_1 \le \frac{2n}{3}$, אזי קיימים שני מספרים a_i ו a_j כך שהכפולה המשותפת הקטנה ביותר שלהם קטנה או שווה ל $2n$.

נגדיר שתי סדרות של מספרים:

$$(1) \quad [\tfrac{2n}{3}],\ [\tfrac{2n}{3}]+1,\ [\tfrac{2n}{3}]+2,\ \dots,\ n$$

$$(2) \quad 2[\tfrac{2n}{3}],\ 2[\tfrac{2n}{3}]+2,\ 2[\tfrac{2n}{3}]+4,\ \dots,\ 2n$$

כל מספר מסדרה *(2)* הוא כפולה של מספר מתאים מסדרה *(1)*, וכולם מספרים טבעיים מ 1 עד $2n$.

א) בין n המספרים הנתונים, מופיעים שני מספרים מתאימים מסדרות *(1)* ו *(2)*. מכאן, הכפולה המשותפת הקטנה ביותר שלהם קטנה או שווה ל $2n$.

ב) בין n המספרים הנתונים, אין שני מספרים מתאימים מסדרות *(1)* ו *(2)*.
קיימות שתי אפשרויות: $a_1 = [\frac{2n}{3}]$ או $a_1 < [\frac{2n}{3}]$

1) $a_1 = [\frac{2n}{3}]$.
n המספרים הנתונים, כוללים בתוכם את כל המספרים הגדולים מ a_1, שאינם בסדרות *(1)* ו *(2)* וכן כוללים בדיוק מספר אחד מכל זוג מספרים מתאימים מסדרות *(1)* ו *(2)* כי:

$$2n - ([\tfrac{2n}{3}] - 1) - (n - ([\tfrac{2n}{3}] - 1)) = n$$

הסבר: $([\frac{2n}{3}] - 1)$ הוא מספר המספרים הקטנים מ a_1 ולכן אינם בין n המספרים הנתונים. $(n - ([\frac{2n}{3}] - 1))$ הוא מחצית ממספר המספרים שבסדרות *(1)* ו *(2)* יחד, מכיוון שאין בין n המספרים הנתונים שני מספרים מתאימים משתי הסדרות.)

נבדוק שלושה מקרים לגבי n:

(i) $n = 3k$

בין n המספרים הנתונים מופיע n או 2n (כי n ו 2n הם זוג מסדרות *(1)* ו *(2)*).

$$[\frac{2n}{3}] = [\frac{6k}{3}] = 2k \quad , \quad n = 3k \quad ; \quad 2n = 6k$$

הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של $[\frac{2n}{3}]$ ושל n היא $2n = 6k$.

הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של $[\frac{2n}{3}]$ ושל 2n היא $2n = 6k$.

(ii) $n = 3k + 1$

בין n המספרים הנתונים מופיע $n - 1$ או $2(n-1)$.

$$[\frac{2n}{3}] = [\frac{6k + 2}{3}] = 2k \quad ; \quad n - 1 = 3k \quad ; \quad 2(n - 1) = 6k$$

ההמשך כמו ב (i).

(iii) $n = 3k + 2$

המספר $3[\frac{2n}{3}]$ חייב להיות בין המספרים הנתונים. זאת מכיוון ש $3[\frac{2n}{3}] = 3(2k + 1)$ הוא מספר אי-זוגי ולכן איננו בסדרה *(2)*. אך הוא גם איננו בסדרה *(1)* מכיוון ש $3(2k + 1) > n$.

$$[\frac{2n}{3}] = 2k + 1 \quad ; \quad 3[\frac{2n}{3}] = 3(2k + 1)$$

הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של $[\frac{2n}{3}]$ ושל $3[\frac{2n}{3}]$ היא $3(2k + 1) < 2n$.

$a_1 < [\frac{2n}{3}]$ (2

קיים $k < n$ כך ש $a_1 = [\frac{2k}{3}]$

לפי הדרך שתוארה בשלב 1, קיים מספר שהכפולה המשותפת הקטנה ביותר שלו ושל a_1 קטנה או שווה ל $2n > 2k$.

34. נסתכל על n תלמידי הכיתה כעל n נקודות במישור, שאף שלוש אינן על ישר אחד. נחבר כל שתי נקודות ונקבל $\frac{n(n-1)}{2}$ קטעים (מגירות). אם תלמיד A שלח גלויה לתלמיד B, נסמן חץ על הקטע AB מ A ל B. מספר החיצים שווה למספר הגלויות שנשלחו, כלומר kn (פנינים). לפי עקרון המגירות, נקבל חץ כפול (בשני הכיוונים) אם

$$kn > \frac{n(n-1)}{2}$$

$$k > \frac{n-1}{2}$$

כלומר, ה k הקטן ביותר הוא $k = [\frac{n-1}{2}] + 1$.

נשאר להראות עוד, כי כאשר נוציא מכל קודקוד של מצולע בעל n קודקודים, $k = [\frac{n-1}{2}]$ חיצים לפי כיוון השעון, לא ימצא חץ כפול. ובכך הוכחנו שה k המינימלי הוא $[\frac{n-1}{2}] + 1$.

35. א) נתונים 51 מספרים דו-ספרתיים (פנינים) ו 9 ספרות היכולות לשמש כספרת עשרות (מגירות). לפי "עקרון המגירות", ישנה מגירה A שבה לפחות 6 מספרים (ולכל היותר 10 מספרים בכל מגירה).
נשארו לפחות 41 מספרים (פנינים) ו 8 ספרות-עשרות (מגירות).
לכן, ישנה מגירה B שבה לפחות 6 מספרים.
נשארו לפחות 31 מספרים ו 7 ספרות. לכן, ישנה מגירה C שבה לפחות 5 מספרים.
נשארו לפחות 21 מספרים ו 6 ספרות. לכן, ישנה מגירה D שבה לפחות 4 מספרים.
נשארו לפחות 11 מספרים ו 5 ספרות. לכן, ישנה מגירה E שבה לפחות 3 מספרים.
נשאר לפחות מספר אחד הנמצא באחת המגירות שנשארו - F.

בחירת 6 מספרים, כך שאין שניים ביניהם בעלי אותה ספרת-יחידות או ספרת-עשרות, תעשה כדלקמן:

ממגירה F נבחר אחד המספרים הנמצאים בה (יש לפחות אחד).

במגירה E ישנם לפחות 3 מספרים בעלי ספרת-עשרות השונה מזו של המספר שבחרנו מ F. לפחות שני מספרים ב E, בעלי ספרת-יחידות שונה מזו של המספר שבחרנו מ F. נבחר אחד מהם.

במגירה D ישנם לפחות 4 מספרים. לפחות שניים מהם בעלי ספרת-יחידות שונה מזו של שני המספרים שכבר בחרנו מ F ומ E. נבחר אחד מהם.

במגירה C ישנם לפחות 5 מספרים. נוכל לבחור מספר אחד משניים, באותו אופן שפורט לעיל.

במגירה B ישנם לפחות 6 מספרים. נוכל לבחור מספר אחד משניים.

במגירה A ישנם לפחות 6 מספרים. לכן ישנו לפחות מספר אחד המתאים לצרכינו.

בדרך זו בחרנו 6 מספרים המקיימים את התנאי המבוקש.

הערה: בניסוח השאלה חלה טעות. צ"ל: "הראה כי אפשר לבחור ביניהם <u>לפחות</u> 6 מספרים ...". לדוגמא, אם נתונים 51 המספרים הבאים, נוכל לבחור את 9 המספרים המסומנים בעיגול:

10									
20	21								
30	31	32							
40	41	42	43	44					
50	51	52	53	54	55				
60	61	62	63	64	65	66			
70	71	72	73	74	75	76	77		
80	81	82	83	84	85	86	87	88	
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

ב) נוכיח באינדוקציה מתמטית על n, שה m הקטן ביותר הוא
$m = n(k - 1) + 1$

(i) $n = 3$, $k = 2$, (נתון $1 < k < n$)
$m = n(k - 1) + 1 = 3(2 - 1) + 1 = 3 + 1 = 4$
בכל סידור של 4 צריחים על לוח שחמט של 3×3 ניתן לבחור 2 צריחים כך שאינם "מכים" זה את זה.

(ii) נניח כי בכל חלוקה של $m = (n - 1)(k - 2) + 1$ צריחים על לוח שחמט $(n-1)\times(n-1)$, ניתן לבחור $k - 1$ צריחים, נסמן $\ell = k - 1$ $(1 < \ell < n - 1)$, כך שאינם "מכים" זה את זה; ונראה כי בכל חלוקה של $m = n(k - 1) + 1$ צריחים על לוח שחמט $n\times n$, ניתן לבחור k צריחים כמבוקש.

נתונים $m = n(k - 1) + 1$ צריחים על לוח שחמט $n\times n$.
לכל k, נבחר צריח כך שסכום הצריחים הנמצאים בשורה ובטור העוברים דרכו אינו גדול מ $n + k - 2$ (בסוף נוכיח כי קיים צריח כזה). "נמחוק" את השורה והטור הנ"ל. נקבל לוח $(n-1)\times(n-1)$. על הלוח החדש ישנם לפחות $(n - 1)(k - 2) + 1$ צריחים כי:

$$m - (n + k - 2) = n(k - 1) + 1 - (n + k - 2)$$
$$= nk - n - n - k + 1 + 2$$
$$= (nk - 2n) - (k - 2) + 1$$
$$= (n - 1)(k - 2) + 1$$

לפי הנחת האינדוקציה, ניתן לבחור ℓ (כלומר $k - 1$) צריחים $(1 < \ell < n - 1)$, כך שאף שניים אינם "מכים" זה את זה. נוסיף ל $k - 1$ הצריחים את הצריח ש"נמחק" ונקבל k צריחים כמבוקש.

עתה נראה כי אם $m = n(k - 1) + 1$, אפשר לבחור צריח כך שסכום הצריחים הנמצאים בשורה ובטור של צריח זה, הוא לכל היותר $n + k - 2$ (כולל הצריח שנבחר).
נוכיח בדרך השלילה: נניח שלא קיים צריח כזה.
נסתכל בשורה (או בטור) שבה מספר הצריחים הגדול ביותר - נסמן מספר זה ב p $(p \leq n)$. לפי ההנחה, סכום הצריחים

הנמצאים בשורה ובטור של כל אחד מ p הצריחים גדול מ $n + k - 2$;
כלומר, לפחות $n + k - 1$. לכן, מספר הצריחים על הלוח הוא לפחות

$$p(n + k - 1) - p^2 + p = p(n + k - p)$$

(מחסירים p^2, מכיוון שלכל צריח מ p הצריחים, ספרנו את השורה (או הטור) p פעמים ובסה"כ p^2 פעמים. מוסיפים p, מכיוון שאחרי החיסור של p^2, לא נספרו p הצריחים הנדונים).

מספר הצריחים על הלוח הוא לכל היותר np ולכן:

$$np \geq p(n + k - p)$$

$$n \geq n + k - p$$

$$0 \geq k - p$$

$$p \geq k$$

מכאן,

$$(p - k)(n - p) \geq 0$$

$$pn - p^2 + pk - nk \geq 0$$

$$p(n + k - p) \geq nk$$

$n > 1$ ולכן $nk > n(k - 1) + 1$ ומכאן:

$$p(n + k - p) > n(k - 1) + 1$$

כלומר:

$$p(n + k - p) > m$$

קיבלנו שיש על הלוח יותר מ m צריחים וזוהי סתירה. לכן, קיים צריח כך שסכום הצריחים הנמצאים בשורה ובטור של צריח זה, הוא לכל היותר $n + k - 2$.

.36 בתרגום הבעיה נפלה טעות. צ"ל "סכומם <u>או</u> הפרשם".

חילוק ב 100 נותן 100 שאריות שונות, מ 0 עד 99. במקום כל שארית הגדולה מ 50 ניקח שארית שלילית (לדוגמא $372 = 100\cdot 3 + 72$ ו $372 = 100\cdot 4 - 28$). נסתכל בערך המוחלט של השאריות. התקבלו 52 שאריות (פנינים) שכל אחת מהן היא מספר מ 0 עד 50. כלומר, 51 מספרים שונים (מגירות). לכן יש ביניהם שתי שאריות שוות. שני המספרים

המתאימים, a_i ו a_j, מקיימים אחת משתי האפשרויות:

(i) שתי השאריות שוות גם בערכן המוחלט וגם בסימונים, כלומר המספרים המתאימים הם:

$$a_i = 100q + r_i$$

$$a_j = 100p + r_i$$

או

$$a_i = 100q - r_i$$

$$a_j = 100p - r_i$$

אזי ההפרש בין מספרים אלה מתחלק ב 100.

(ii) שתי השאריות נגדיות זו לזו. אזי סכום המספרים המתאימים להן מתחלק ב 100.

מההוכחה הנ"ל ברור שטיעון זה אינו נכון עבור 51 מספרים.

הערה: באותה דרך ניתן להראות שטיעון זה נכון גם עבור מספרים שלמים.

37. נסמן את הקטעים ונסדר אותם לפי אורכם:

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{10} < 55$$

נניח אין בין הקטעים שלושה שאפשר לבנות מהם משולש. אזי:

$$a_3 \geq a_2 + a_1 > 2$$

$$a_4 \geq a_3 + a_2 > 3$$

$$a_5 \geq a_4 + a_3 > 5$$

$$a_6 \geq a_5 + a_4 > 8$$

$$a_7 \geq a_6 + a_5 > 13$$

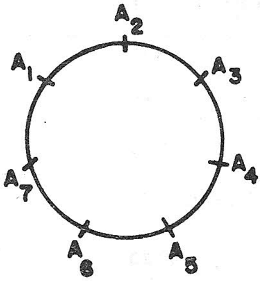
$$a_8 \geq a_7 + a_6 > 21$$

$$a_9 \geq a_8 + a_7 > 34$$

$$a_{10} \geq a_9 + a_8 > 55$$

קיבלנו סתירה לכך ש $a_{10} < 55$.

38. א) מכיוון שישנם שני צבעים (מגירות) ושבע נקודות (פנינים), אזי יש לפחות ארבע נקודות בצבע אחד.



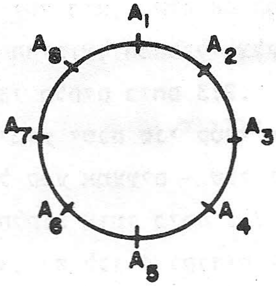
קיימות שלוש אפשרויות:

(i) אם קיימים שלושה קודקודים שווי צבע עוקבים, נחבר אותם ונקבל משולש שווה שוקיים מתאים.

(ii) אם ארבעת הקודקודים A_1 , A_2 , A_4 , A_5 הם שווי צבע, נקבל משולש שווה שוקיים $A_1A_4A_5$ מתאים.

(iii) אם ארבעת הקודקודים A_1 , A_3 , A_5 , A_7 הם שווי צבע, נקבל משולש מתאים: $A_1A_3A_5$.

ב) במקרה של מתומן, הטענה אינה נכונה. ישנם שמונה קודקודים (פנינים) ושני צבעים (מגירות). לכן ישנם לפחות ארבעה קודקודים שווי צבע. אך אם A_1 , A_2 , A_5 , A_6 הם קודקודים שווי צבע, לא קיים משולש שווה שוקיים מתאים.



ג) לא קשה להביא דוגמאות לכך שהטענה אינה נכונה עבור $n = 3,4,6$.
בעבור $n = 5$, הטענה נכונה. אפשר להוכיח זאת בדרך שהוכחנו ל $n = 7$.

ד) נוכיח עתה, כי הטענה נכונה בעבור $n \geq 9$.

(i) אם אין שני קודקודים עוקבים שווי צבע, אזי בין חמישה קודקודים עוקבים, ימצאו שלושה שווי צבע היוצרים משולש שו"ש (שווה שוקיים).

(ii) נניח יש שני קודקודים עוקבים שווי צבע (לבן): A_1 ו A_2.
אם A_3 או A_n, גם הם בצבע לבן, אזי נקבל משולש שווה שוקיים שקודקודיו כולם צבועים לבן.

נניח A_3 ו A_n צבועים שחור. אם גם A_6 צבוע שחור, אזי $A_nA_3A_6$ הוא משולש שווה שוקיים שחור.

נניח A_6 צבוע לבן. אם גם A_4 לבן, אזי $A_2A_4A_6$ משולש שו"ש לבן.

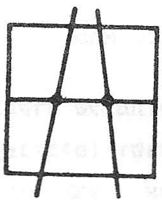
נניח A_4 שחור. אם גם A_5 שחור, אזי $A_3A_4A_5$ משולש שו"ש שחור.

נניח A_5 לבן. אם גם A_{n-1} לבן, אזי $A_{n-1}A_2A_5$ משולש שו"ש לבן.

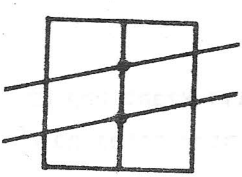
נניח A_{n-1} שחור. אם גם A_{n-2} שחור, אזי $A_{n-2}A_{n-1}A_n$ משולש שו"ש שחור.

נניח A_{n-2} לבן. גם הוא לבן (ראה לעיל) ו A_2 לבן, לפי הנחתנו. לכן $A_{n-2}A_2A_6$ הוא משולש שו"ש לבן ($n \geq 9$).

39. ישר המחלק ריבוע לשני מרובעים, חותך שתי צלעות נגדיות. לכן, שני המרובעים הם מלבנים או טרפזים ישרי זוית שגובהם שווה לאורך צלע הריבוע.



כל ישר כזה, מחלק את קטע האמצעים של הריבוע, המקביל לצלעות שהוא חותך, לשני חלקים ביחס 2:3.



לריבוע ישנם שני קטעי אמצעים. לכל קטע אמצעים - שתי נקודות המחלקות אותו ביחס 2:3.
לכן, יש לנו 4 נקודות (מגירות) שדרכן עוברים 9 ישרים (פנינים). אזי לפחות שלושה ישרים עוברים דרך נקודה אחת.

הערה: כפי שראיתם, פתרנו מספר בעיות שלא באמצעות "עקרון המגירות". נשמח לקבל פתרונות לבעיות אלה, המסתמכים על "עקרון המגירות".