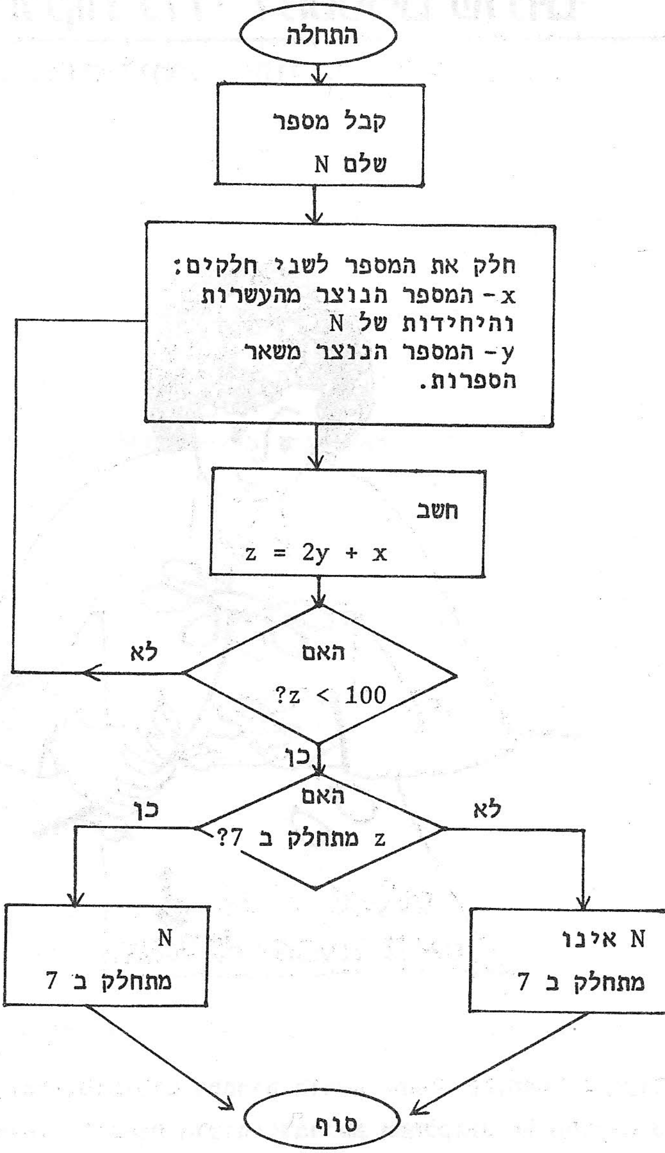
מבחן התחלקות כללי למספרים שלמים

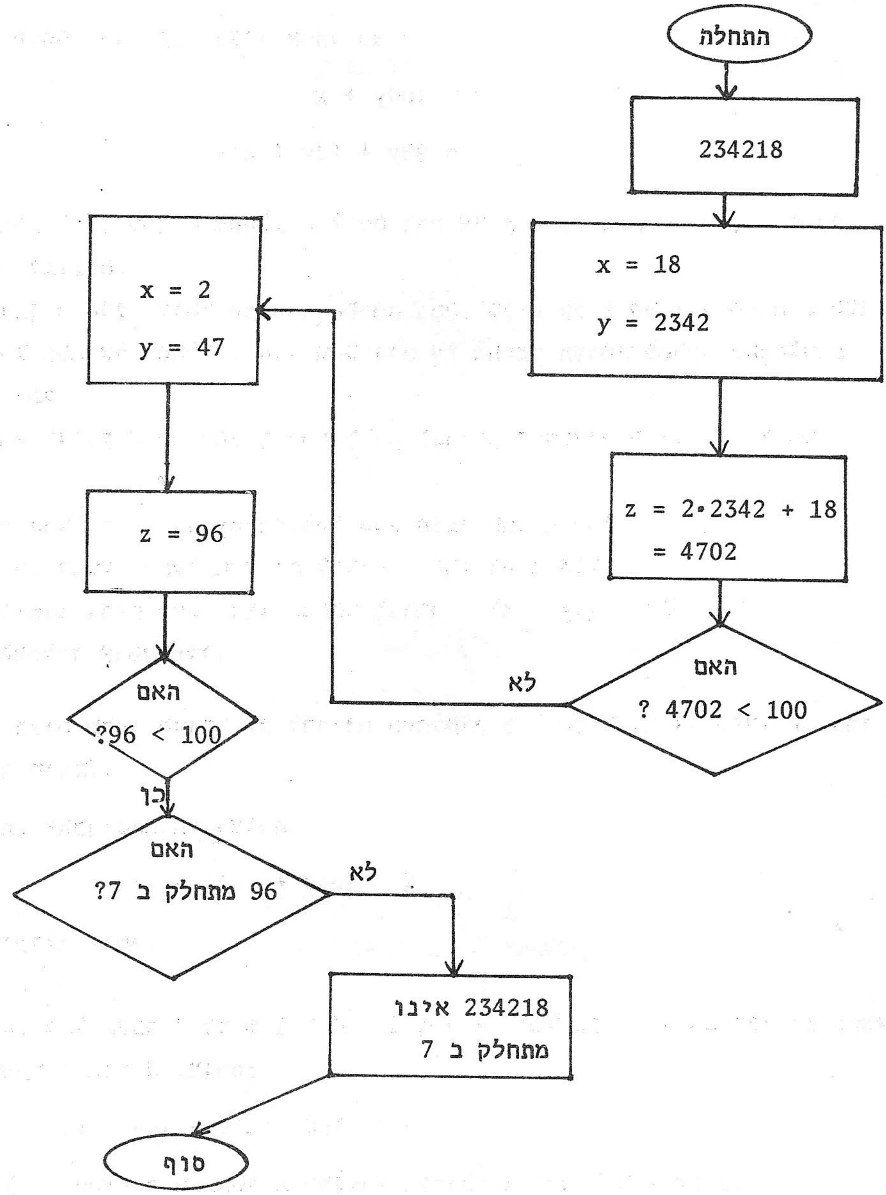
עובד ע"י מ. ברוקהיימר. תורגם ע"י ע. קרמר.

לעיתים תכופות למדי, מופיעים בספרות הוראת המתמטיקה, מאמרים העוסקים במציאת דרכים חדשות (ופחות חדשות) לבדיקת התחלקותם של מספרים שלמים.

דרך כללית לבדיקת התחלקותם של מספרים שלמים במספרים קטנים מ 100, ניתנה לאחרונה במאמר מאת וולטר זטלה*. ההצעה המקורית הוגשה לו על ידי אחד מתלמידיו ועסקה בהתחלקות מספר ב 7. היא מתוארת בתרשים הזרימה, בעמוד הבא, בצמוד לדוגמא מספרית.

*Walter Szetela, A general divisibility test for whole numbers, The Mathematics Teacher, Vol. 73, No. 3, March 1980.


התחלה
קבל מספר
שלם N
חלק את המספר לשני חלקים:
x- המספר הנוצר מהעשרות
והיחידות של N
y- המספר הנוצר משאר
הספרות.
חשב
z = 2y + x
האם
?z < 100
לא
כן
האם
?z מתחלק ב 7
כן
לא
N
מתחלק ב 7
N איננו
מתחלק ב 7
סוף


התחלה
234218
x = 18
y = 2342
z = 2·2342 + 18
= 4702
האם
? 4702 < 100
לא
x = 2
y = 47
z = 96
האם
?96 < 100
כן
האם
?7 96 מתחלק ב
לא
234218 איננו
מתחלק ב 7
סוף

הסבר התהליך:

יהי N המספר הנבדק. נציג אותו בצורה:

$$N = 100y + x$$
$$= 98y + (2y + x)$$

98 מתחלק ב 7, לכן N מתחלק ב 7 אם ורק אם $2y + x$ מתחלק ב 7, וזה מה שרצינו להוכיח.
מה מיוחד ב 98? זוהי הכפולה השלמה המכסימלית של 7 שעדיין קטנה מ 100. כך, בכל שלב של התהליך, אנו מקטינים את המספר העומד למבחן ההתחלקות ככל שנוכל.
נעיר כי בדיוק אותו תהליך יתאים גם לבדיקת התחלקות ב 14, 49 ו 98.

מהוכחת הכלל ל 7, נובעת הכללתו לכל מספר קטן מ 100.
מה יהיה, למשל, הכלל המתאים לבדיקת התחלקות ב 13?
במבט ראשון נראה שאם יוצג המספר בצורה: $N = 91y + (9y + x)$
יהיה התהליך אופטימלי.

(זוהי הצגת מספר הטובה גם לבדיקת התחלקות ב 7 אך איננה אופטימלית, כפי שראינו קודם).

עם זאת, יתכן שהצגתו בצורה:

$$N = 104y + (-4y + x)$$

תהיה יעילה יותר.

בהכללה, לכל מספר d כך ש $1 < d < 100$ כדי לקבל תהליך אופטימלי יש להציג את המספר הנבדק N בצורה:

$$N = (100 - a)y + (ay + x)$$

כאשר $(100 - a)$ הוא הכפולה השלמה, הקרובה ביותר ל 100 של d.
(a יכול לקבל ערך חיובי או שלילי).

לרוב המספרים זהו תהליך שימושי למדי, אך למספרים כמו 61 או 73 הוא מותיר עבודת חישוב לא מעטה. למרות זאת, הדרך מיוחדת ומעניינת בגלל הכלליות שלה, ולא בכל יום רוצה אדם לבדוק התחלקות מספר ב 73.