סדרות Farey

מאת: כרמית ברקת
בית-ספר איזורי מקיף ע"ש י.ח. ברנר

הערת המערכת: כותבת המאמר, תלמידת י"ב, הכינה עבודת גמר במתמטיקה במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן בהדרכת פרופ' מ. ברוקהיימר וי. סלומון.
החומר המובא כאן לקוח מתוך העבודה. לתלמידי תיכון יש הידע והכלים הדרושים לנושא, אך נחוצה כמובן בגרות בחשיבה המתמטית כדי להתמודד עם ההוכחות ופיתוח החומר.

במסגרת עבודת הגמר שלי בנושא "שברי היחידה", פגשתי בסדרות Farey, אשר ריתקו אותי מאוד. אציג כאן כמה תכונות של סדרות אלו ואראה כיצד ניתן בהסתמך עליהן להציג כל שבר רציונלי $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ כסכום של שברי יחידה.

<u>הגדרה</u>: שבר יחידה הוא שבר שמונהו שווה ל 1, ומכנהו מספר טבעי.

I. <u>שני משפטי הכנה</u>

לפני הצגת סדרות Farey ותכונותיהן, יובאו שני משפטים העוסקים בתכונות של שברים, עליהם נסתמך בהמשך.

<u>משפט 1</u>: אם $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ו h , k שלמים חיוביים.

אזי: $\frac{a}{b} < \frac{ha + kc}{hb + kd} < \frac{c}{d}$ *

---

* ראה דיון במקרה פרטי, "משפט מק-קילי", שבבים, תיק מס' 2.

הוכחה: נתון: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

$$ad < cb$$

נכפול ב k $(k > 0)$ $\quad kad < kcd$

נוסיף hab $\quad hab + kad < hab + kcb$

$$a(hb + kd) < b(ha + kc)$$

$$\frac{a}{b} < \frac{ha + kc}{hb + kd}$$

הוכחנו את אי השוויון השמאלי.

באופן דומה נוכיח גם את אי-השוויון הימני:

נתון: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

$$ad < cb$$

נכפול ב h $(h > 0)$ $\quad had < hcb$

נוסיף kcd $\quad had + kcd < hcb + kcd$

$$d(ha + kc) < c(hb + kd)$$

$$\frac{ha + kc}{hb + kd} < \frac{c}{d}$$

הוכחנו את אי-השוויון הימני.

משפט 2: אם $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $bc - ad = 1$ ו $\frac{a}{b} < \frac{e}{f} < \frac{c}{d}$ e ו f שלמים חיוביים.

אזי קיימים h ו k שלמים חיוביים כך ש:

$$e = ha + kc$$

$$f = hb + kd$$

<u>הוכחה</u>: נפתור את מערכת המשוואות:

$$(1) \qquad ha + kc = e$$

$$(2) \qquad hb + kd = f$$

עבור h ו k , ונוכיח ש h ו k הם שלמים חיוביים.

נכפול את (1) ב d $\qquad had + kcd = ed$

נכפול את (2) ב c $\qquad \underline{hbc + kcd = cf}$

נחסר את (1) מ (2) $\qquad h(bc - ad) = cf - ed$

נתון: $\qquad bc - ad = 1$

לכן: $\qquad h = cf - ed$

היות ו c, f, e, d שלמים אז h שלם גם כן. נוכיח עתה ש h חיובי.

נתון: $\qquad \frac{e}{f} < \frac{c}{d}$

לכן: $\qquad ed < cf$

לכן: $\qquad 0 < cf - ed$

ולכן: $\qquad h = cf - ed > 0$

מכאן ש- h חיובי.

באופן דומה ניתן להוכיח גם ש k שלם וחיובי.

II. <u>סדרות Farey</u>

הסדרות נקראות על שמו של מינרולוג בשם Farey, אשר פירסם לראשונה בשנת 1816 מאמר המתאר אותן.

לכל מספר טבעי n קיימת סדרת Farey המסומנת F_n. F_n מכילה את כל השברים המצומצמים $\frac{a}{b}$, המקיימים $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$, $b \leq n$ ומסודרים בסדר עולה.

לדוגמא: $\qquad F_3 : \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$

$\mathfrak{F}_1$	$\frac{0}{1}$																																										$\frac{1}{1}$
$\mathfrak{F}_2$	$\frac{0}{1}$																					$\frac{1}{2}$																					$\frac{1}{1}$
$\mathfrak{F}_3$	$\frac{0}{1}$														$\frac{1}{3}$							$\frac{1}{2}$							$\frac{2}{3}$														$\frac{1}{1}$
$\mathfrak{F}_4$	$\frac{0}{1}$										$\frac{1}{4}$				$\frac{1}{3}$							$\frac{1}{2}$							$\frac{2}{3}$				$\frac{3}{4}$										$\frac{1}{1}$
$\mathfrak{F}_5$	$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{4}$				$\frac{1}{3}$			$\frac{2}{5}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{3}{5}$			$\frac{2}{3}$				$\frac{3}{4}$		$\frac{4}{5}$								$\frac{1}{1}$
$\mathfrak{F}_6$	$\frac{0}{1}$						$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{4}$				$\frac{1}{3}$			$\frac{2}{5}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{3}{5}$			$\frac{2}{3}$				$\frac{3}{4}$		$\frac{4}{5}$		$\frac{5}{6}$						$\frac{1}{1}$
$\mathfrak{F}_7$	$\frac{0}{1}$					$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{7}$		$\frac{1}{3}$			$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$			$\frac{2}{3}$		$\frac{5}{7}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{4}{5}$		$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$					$\frac{1}{1}$
$\mathfrak{F}_8$	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{7}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{5}{7}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{4}{5}$		$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$				$\frac{1}{1}$
$\mathfrak{F}_9$	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{7}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{9}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{5}{7}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{4}{5}$		$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$			$\frac{1}{1}$
$\mathfrak{F}_{10}$	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{9}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{7}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{4}{5}$		$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$		$\frac{1}{1}$
$\mathfrak{F}_{11}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$	$\frac{1}{1}$

טבלת סדרות Farey: $F_1 \ldots F_{11}$*

* מקור הטבלה:
Beck, A., Bleicher, M.N., Crowe, D. W., Excursions into Mathematics, Worth Publishers, 1969.

לסדרות תכונות מעניינות וחלק מהן יובאו כאן.

אם $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ הם שברים מצומצמים ומקיימים: $0 \le \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \le 1$ אזי מתקיימות התכונות הבאות.

א) אם שברים $\frac{a}{b}$ ו $\frac{c}{d}$ סמוכים ב F_{n-1} ומופרדים על ידי $\frac{e}{f}$ ב F_n כש $n \ge 2$ אזי $e = a + c$ ו $f = b + d = n$

ב) אם $\frac{a}{b}$ ו $\frac{c}{d}$ סמוכים ב F_ℓ, אז $bc - ad = 1$.

ג) עבור $m > 1$, כל שני שברים סמוכים ב F_m הם בעלי מכנים שונים.

ד) לגבי כל שני שברים סמוכים $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ מתקיים התנאי: $\frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bd}$

<u>הוכחת תכונות א' ו ב'</u>

נוכיח את תכונה א' ותכונה ב' כשתי טענות במשפט אחד.

<u>משפט:</u>

1. אם $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ סמוכים ב F_{n-1}, ומופרדים על ידי $\frac{e}{f}$ ב F_n עבור $n \ge 2$
אז: $\frac{e}{f} = \frac{a + c}{b + d}$ כך ש $e = a + c$ ו $f = b + d = n$.

2. אם $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ סמוכים ב F_ℓ , אזי $bc - ad = 1$.

<u>הוכחה:</u> באינדוקציה.

מתוך התבוננות בטבלה רואים כי המשפט נכון עבור הערכים שבטבלה.
נניח שהמשפט נכון עבור כל n $n \le m - 1$.

נוכיח שהמשפט נכון עבור $n = m$.

נוכיח תחילה את טענה 1.

נניח: $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$ שברים סמוכים ב F_{m-1} וקיים: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

לפי הנחת האינדוקציה של טענה 2: $bc - ad = 1$.

על-פי משפט הכנה 2: כל השברים $\frac{p}{q}$ המקיימים: $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$ מתקבלים על-ידי:

$$p = ha + kc$$

$$q = hb + kd$$

כאשר h ו k שלמים חיוביים.

ברור ש q מקבל את הערך המינימלי כאשר $h = k = 1$.

כלומר: $hb + kd > b + d$ כאשר h ו k שניהם שונים מ 1.

נתון ש: $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ סמוכים ב F_{m-1} ו $\frac{p}{q}$ אינו נמצא ב F_{m-1}

לכן: $hb + kd > b + d \geq m$.

ומכאן יש לכל היותר שבר אחד $\frac{p}{q}$ שמכנהו $q = b + d = m$ הנמצא בין $\frac{a}{b}$ ל $\frac{c}{d}$.

נתון ששבר $\frac{e}{f}$ נמצא בין $\frac{a}{b}$ ו $\frac{c}{d}$ ב F_m, כלומר $f \leq m$ ולכן חייב להתקיים: $f = b + d = m$.

ומכיון ש $k = h = 1$ מתקבל $e = a + c$, והשבר היחיד המפריד בין $\frac{a}{b}$ ו $\frac{c}{d}$ ב F_m הוא $\frac{e}{f} = \frac{a + c}{b + d}$.

כך ש: $e = a + c$ $f = b + d = m$

מ.ש.ל.

<u>הערה:</u> מתוך הוכחה זו נובע שבמעבר מ F_{m-1} ל F_m יכול להתווסף לכל היותר שבר אחד בין שני שברים סמוכים.

נוכיח את טענה 2

נניח: $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$ סמוכים ב F_ℓ וקיים: $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$.

אם $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}$ סמוכים ב $F_{\ell-1}$ אזי על סמך הנחת האינדוקציה: $bc - ad = 1$, והמשפט מוכח.

נניח ש: $\frac{a}{b}$ אינו ב $F_{\ell-1}$ (ההוכחה עבור המקרה בו $\frac{c}{d}$ אינו ב $F_{\ell-1}$ דומה). $\frac{a}{b}$ נוצר במעבר מ $F_{\ell-1}$ ל F_ℓ .

אזי ב F_ℓ , $\frac{a}{b}$ מפריד בין שני שברים שהיו סמוכים ב $F_{\ell-1}$, שאחד מהם $\frac{c}{d}$, נקרא לשני $\frac{r}{s}$. קיים: $\frac{c}{d} < \frac{r}{s}$.

לפי טענה 1 (הוכחה לעיל): $a = r + c$

$b = s + d$

היות ו $\frac{c}{d}$, $\frac{r}{s}$ סמוכים ב: $F_{\ell-1}$ אזי לפי הנחת האינדוקציה:

$$cs - dr = 1$$

נוסיף ונחסיר dc $\quad (cs + dc) - (dr + dc) = 1$

כלומר: $\quad c(s + d) - d(r + c) = 1$

היות ו: $a = r + c$, $b = s + d$, נקבל: $cb - ad = 1$

מ.ש.ל.

<u>הוכחת תכונה ג'</u>

<u>משפט:</u> עבור $m > 1$, כל שני שברים סמוכים ב F_m, הם בעלי מכנים שונים.

<u>הוכחה</u>

לפי תכונה א' שלעיל, יודעים שכאשר מתווסף שבר $\frac{e}{f}$ במעבר מ F_{m-1} ל F_m, אזי f שווה לסכום מכני השברים שמימינו ומשמאלו ולכן הוא גדול מכל אחד מהם, ולכן שונה.

מ.ש.ל.

<u>הוכחת תכונה ד'</u>

<u>משפט:</u> לגבי כל שני שברים סמוכים $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ מתקיים התנאי:

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{1}{bd}$$

<u>הוכחה:</u>

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc - ad}{db} = \frac{1}{db}$$ ($cb - ad = 1$, תכונה ב')

מ.ש.ל.

III. הצגת שברים כסכום של שברי יחידה

נושא זה טופל בעבר ב"שבבים" (מ. ברוקהיימר, תיק מס' 7, תיק מס' 13).

כאן נראה כיצד ניתן להציג כל שבר רציונלי $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ כסכום של שברי יחידה בהסתמך על סדרות Farey.

ראינו כי לגבי כל שני שברים סמוכים $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ מתקיים התנאי:

$$\frac{r}{s} = \frac{p}{q} + \frac{1}{sq}$$

נראה עתה כיצד על-סמך תכונה זו ניתן להציג שבר $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$, מצומצם, כסכום של שברי-יחידה:

נסתכל בסדרת Farey - F_b, $\frac{a}{b}$ חייב להימצא שם.

נניח שהשבר לפני $\frac{a}{b}$ ב F_b הוא: $\frac{a_1}{b_1}$

ולכן על-פי התכונה הנ"ל: $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{1}{b \cdot b_1}$

ברור כי $\frac{a}{b}$ נוצר במעבר מ F_{b-1} ל F_b (על-פי הגדרת סדרות Farey).

ולכן $\frac{a}{b}$ מקיים את תכונה א' (בה הוא מיוצג כ $\frac{e}{f}$).

מכאן מתקבל: $b_1 < b$

$$a_1 < a$$

אם $a_1 = 0$ אז $\frac{a}{b} = \frac{1}{bb_1}$. קבלנו שבר יחידה והתהליך נסתיים.

אם $a_1 > 0$ חוזרים על התהליך לגבי $\frac{a_1}{b_1}$ שנמצא בסידרה F_{b_1}

ואז: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} + \frac{1}{b_1 \cdot b_2}$

ממשיכים בתהליך עד שמגיעים לשלב בו $a_k = 0$ ולכן $b_k = 1$.

(כיוון שהשבר היחידי בסדרות Farey שמונהו 0 הוא $\frac{0}{1}$).

כלומר: $\frac{a_{k-1}}{b_{k-1}} = \frac{1}{b_k \cdot b_{k-1}} = \frac{1}{b_{k-1}}$

לכן מתקבל: $\frac{a}{b} = \frac{1}{b_{k-1}} + \frac{1}{b_{k-1} \cdot b_{k-2}} + \ldots + \frac{1}{b_2 \cdot b_1} + \frac{1}{b_1 b}$

ראינו כי: $a > a_1 > a_2 > \ldots > a_k = 0$, כלומר: המונים הולכים וקטנים בכל צעד, לכן מספר הצעדים חסום על ידי a, והתהליך סופי ומתכנס.

ראינו גם כי: $b > b_1 > b_2 > \ldots > b_k$

לכן: $b \cdot b_1 > b_1 \cdot b_2 > \ldots > b_{k-1} \cdot b_k = b_{k-1}$

כלומר: המכנים שונים זה מזה. המכנה הגדול ביותר הוא $b \cdot b_1$, והיות ו $b > b_1$, חסומים המכנים בגודל $b(b-1)$.

האלגנטיות של השימוש בסדרות Farey להצגת שברי-יחידה, מתבטאת בכך שבנוסף לעובדה שאורך הייצוג חסום בגודל המונה a, גודל המכנים חסום ב $b(b-1)$.

<u>דוגמא:</u> $\frac{8}{9}$

נסתכל בסדרה F_9: $\frac{8}{9} = \frac{7}{8} + \frac{1}{72}$

נסתכל בסדרה F_8: $\frac{7}{8} = \frac{6}{7} + \frac{1}{56}$

נסתכל בסדרה F_7: $\frac{6}{7} = \frac{5}{6} + \frac{1}{42}$

נסתכל בסדרה F_6: $\frac{5}{6} = \frac{4}{5} + \frac{1}{30}$

נסתכל בסדרה F_5: $\frac{4}{5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20}$

נסתכל בסדרה F_4: $\frac{3}{4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12}$

נסתכל בסדרה F_3: $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

מכאן מקבלים: $\frac{8}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72}$

בשבבים, תיק מס' 7 מופיעה ומוכחת שיטת סילבסטר, שגם היא שיטה להצגת שבר רציונלי כסכום של שברי-יחידה שונים, לפיה:

$$\frac{8}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

ניתן לראות כי ההצגה לפי שיטת סדרות Farey ארוכה יותר מההצגה לפי שיטת סילבסטר.

ניקח דוגמא נוספת: $\frac{8}{11}$

לפי שיטת סדרות Farey: $\frac{8}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{21} + \frac{1}{77}$

לפי שיטת סילבסטר: $\frac{8}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{37} + \frac{1}{4070}$

בדוגמא זו אורך ההצגה שווה אך המכנה האחרון בשיטת סילבסטר גדול מאוד יחסית לשאר המכנים.

אם נשווה את שתי השיטות באופן כללי נראה כי שיטת סילבסטר תוביל להצגות קצרות יותר. מצד שני, המכנים בשיטת סילבסטר יהיו מספרים גדולים יותר, והסיבה: גודל המכנים בהצגה המבוססת על סדרות Farey חסום במכפלת המכנה של השבר הנתון במספר סמוך הקטן ממנו, כלומר: $b(b - 1)$, ואילו המכנים בשיטת סילבסטר גדלים באופן אקספוננציאלי.